... حتماً مقدمهٔ کتاب حسابان جای بی‌ربطی برای نوشتن از او نیست. تا همین چند وقت پیش همهٔ رسانه‌ها ـ از شبکه‌های مجازی و ماهواره‌ای گرفته تا روزنامه‌های رسمی کشور ـ در یک فضای عاطفی و حزن‌آلود از زندگی و مرگ دختر نابغهٔ ریاضی گفتند، نوشتند، روایت کردند و گریستند. حتی بی‌ربط‌ترین رسانه‌ها و اشخاص هم او را به نام کوچکش صدا زدند و افسوس خوردند. درک مقام علمی او کار آسونی نیست. ما فقط این‌قدر می‌دونیم که خیلی حالیش بود! می‌دونید چرا؟ چون جایزهٔ فیلدز (معتبرترین جایزهٔ علمی ریاضی دنیا) رو برای موضوع "Symmetry of curved Surfaces" (که دقیقاً نمی‌دونیم یعنی چی!) گرفت. چون خیلی از جایزه‌ها و افتخارات معتبر دیگهٔ علمی رو هم از آن خودش کرد. چون در یکی از معتبرترین دانشگاه‌های دنیا بر کرسی استادی تکیه داد. چون همهٔ بزرگان ریاضی عالم به زبون آمدند که «او اسطوره‌ای عجیب و شگفت‌انگیز در عالم ریاضیات بود.»[1] و ...

بدون شک این حرفا در این دوره و زمونه که گاهی به ایرانی‌بودنمون افتخار نمی‌کنیم، مثل آمپول تقویتی عمل می‌کنه و کمی حس وطن‌دوستی رو در ما زنده نگه می‌داره، اما موضوع اینه که در زندگی آدمایی مثل او همیشه نکته‌های آموزندهٔ جهان‌شمول هست که می‌تونه الگوی همهٔ آدمای دنیا باشه. *(لطفاً بقیهٔ این مقدمه رو با دقت بیشتر بخونید و خوب خوب رامع بوش فکر کنید!)*

پدرش در مصاحبه با یک روزنامه گفت: «او ساده مثل همه بود، درس خواند، بالا رفت؛ با کوشش و تلاش» *(«کوشش و تلاش» کلیدواژه است، اون رو به خاطر بسپرید.)*

وقتی از پدر پرسیدند: حالا چرا ریاضی؟ جواب داد: «ریاضی چون منطق دارد، آدم را جذب می‌کند ... ریاضیات تجربهٔ ذهن دارد و لذت حل یک مسئله آدم را سر ذوق می‌آورد. رسیدن به یک راه‌حل انسان را راضی می‌کند ...» *(یه کلیدواژهٔ دیگه: «لذت حل مسئله»!)*

خودش هم حرف پدر را می‌زند: «زیبایی ریاضیات، خود را به شاگردان صبور نشان می‌دهد» *(«صبور» هم کلیدواژهٔ مهمیه درباره‌اش خوب فکر کنید.)* و ادامه می‌دهد: «پرارزش‌ترین بخش مطالعهٔ ریاضی لحظه‌ای است که می‌گویی **«آها»** ذوق کشف و لذت فهمیدن چیزی جدید. احساس ایستادن بالای یک بلندی و رسیدن به دیدی شفاف و واضح» *(«آها» فقط یه واژه نیست. «آها» یک حس از عمق وجود و بیانگر لحظهٔ زیبای فهمیدنه. اگه یک بار «آها» رو تجربه کنی، عاشقش می‌شی.)* حرف دیگه‌ای ندارم، هر چی لازم بود رو این پدر و دختر گفتند.

پیش به سوی **«آها»**

راستی این رو بگم که کتاب ماجرای بیست حسابان هم برای ۲۰گرفتنه و هم می‌تونه شروعی باشه برای این‌که شما طعم خوب ریاضی رو بچشید و حالش رو ببرید. از دوست خوبم آقا مصطفی دیداری که ریاضی رو خوشمزه و باحال می‌نویسه و از خانم میرجعفری که پی‌گیری‌هاشون نقش مهمی در به ثمر رسیدن این کتاب داشت و ویراستارای خوب این کتاب خانم نظری، آقای ابراهیم‌نژاد و خانم عباسی و بر و بچه‌های خستگی‌ناپذیر تولید تشکر می‌کنم.

دم همتون گرم

۱- به نقل از روزنامهٔ همشهری

مقدمهٔ مؤلف

به نام او

آقا چه دوره زمونه‌ای شده. تا اینستا رو باز می‌کنی، شونصد تا پیج میاد پر از تبلیغات کنکوری! ای داد که چرا فلان تکنیک رو نمی‌دونی و ای بیداد که چرا فلان کلاس رو نمی‌آیی و ای خاک که چرا فلان پکیج رو نمی‌خری! بگذریم.

سازمان محترم سنجش در آماری اعلام کرده میانگین درصد ریاضی بچه‌ها زیر ۵ درصد است. فلان نفر هم، منفی زده‌اند و از این‌جور چیزها. آموزش و پرورش هم اعلام کرده میانگین معدل در کل کشور یک‌رقمی است!

همیشه سر کلاس با بچه‌ها راجع به موضوعات مختلف صحبت می‌کنم. از فوتبال گرفته تا موضوعات اجتماعی، دینی و خانوادگی. از هیاهو و کلیشه‌ها بیزارم چه توی صحبت‌کردن، چه توی درس‌دادن، چه توی کتاب‌نوشتن!

ببینید بچه‌ها اول از همه سعی کنید منبع درستی برای کسب اطلاعاتتان به دست آورید. بررسی‌های روان‌شناسی نشان می‌دهد ذهن ما بعد از کسب اطلاعات، منبع آن را فراموش می‌کند. اصلاً علت تأثیر تبلیغات همین است؛ پس ببینید دارید به حرف چه کسی گوش می‌دهید. موضوع دیگر: ببینم از بین این‌همه فوتبالیست چند درصد به تیم ملی راه پیدا می‌کنند؟ چند نفر از ورزشکاران قهرمان المپیک می‌شوند؟ از بین این‌همه خواننده کار چند نفر گل می‌کند؟ بله همیشه موفقیت، بیشتر از شکست مورد توجه قرار می‌گیرد. ما معمولاً علاقه داریم چیزهایی بشنویم که خوشمان می‌آید، هرچند غیرواقعی باشند. این باعث می‌شود که ما همیشه احتمال پیروزی خود را بیش از حد تخمین بزنیم. اشتباه نکنید! هدف من ناامیدکردن شما نیست حتی هدف من نادیده‌گرفتن زحمت بسیاری از دبیران محترم و مشاوران و ... نیست. قطعاً دبیر خوب، کتاب خوب، مشاور خوب لازم است اما صادقانه به شما بگویم همهٔ این‌ها بدون تلاش و زحمت خودتان، تقریباً هیچ تأثیری ندارند. افراد موفق در هر عرصه و حوزه‌ای که باشند، اغلب وقتی راجع به راز و رمز موفقیتشان از آن‌ها سؤال می‌کنید آن را مدیون پشتکار می‌دانند. اگر می‌خواهید در تحصیل موفق بشوید، هیچ راه میانبری وجود ندارد بلکه تعیین‌کننده‌ترین عامل، تلاش خودتان است.

خب پرحرفی کردم. چند نکته هم برای استفادهٔ بهتر از این کتاب بگویم و تمام! این کتاب شامل بخش‌های زیر است:

درس‌نامه: سعی کردم خیلی روان و ساده (البته کامل) درس را آموزش دهم. مطالب اضافه که به دردتان نمی‌خورد در این کتاب نمی‌بینید، اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازم دارید بیان شده است؛ پس به نظرم یک بار هم شده درس‌نامه را به دقت مطالعه کنید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسی است. البته در برخی موارد برای این‌که درس، طولانی نشود و حوصله‌تان سر نرود درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت آورده شده است.

تو امتحان چه خبر: بچه‌ها حجم درس‌ها زیاد است؛ پس تا می‌توانید مطالب را تیپ‌بندی‌شده و منظم به خاطر بسپارید. من سعی کرده‌ام این کار را برای شما انجام بدهم و تیپ‌های مهم امتحانی به همراه نمونه سؤال‌های آن را در هر قسمت بیان کنم. این کار یک فایدهٔ دیگر هم دارد. بعد از خواندن قسمتی از درس‌نامه می‌فهمید که کدام سؤال‌ها را می‌توانید حل کنید.

سؤال‌های امتحانی: همهٔ مثال‌ها و تمرین‌های کتاب و کار در کلاس! و سؤال‌های نهایی سال‌های قبل و (حتی سؤال‌های سال‌های بعد!) را در این قسمت به صورت کاملاً دسته‌بندی‌شده برای شما آورده‌ام. اگر کتاب را از اول سال تهیه کرده‌اید که کم‌کم همه را حل کنید و جلو بیایید اما اگر نزدیک نهایی هستید بیشتر روی سؤال‌های مشابه کتاب درسی، برگرفته از امتحانات مدارس و نهایی‌ها تمرکز کنید. سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت است مقداری بالاتر از کتاب درسی بوده و برخی از آن‌ها نیز تست کنکور بوده‌اند. چون ممکن است در آینده، تست هم در سؤال‌های نهایی بیاید یا معلم شما آزمون تستی هم بگیرد، خوب است به این‌ها هم توجه کنید. (به درد کنکورتون هم می‌خوره!)

آزمون‌های انتهایی هر فصل: بعد از تمام‌شدن هر فصل، خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید، بدانید که باید دوباره به درس نامه و سؤال‌های امتحانی فلش‌بک (رجوع با عین غلیظ) بزنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید، حتی شما دوست عزیز که سؤال را درست حل کرده‌اید!

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو آزمون ترم اول داریم و چهارتا هم نهایی. این‌ها دیگر از نون شب واجب‌تر است. به‌خصوص برای شب‌های بارانی (اشک‌آلود) امتحان! دقت کنید که در پاسخ‌نامهٔ آزمون، راه حل چه‌جوری نوشته شده و بارم به چه چیزهایی اختصاص پیدا کرده است.

در پایان تشکر می‌کنم از همهٔ مسئولین و بر و بچه‌های خیلی‌سبزی. از دکتر نصری، آقای هاشمی و خانم جالینوسی که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند.

بخوانید و حالش را ببرید و به من هم انرژی بدهید تا دوباره برای شما بنویسیم.

دوستدار شما

دیداری

فهرست

فصل اول: جبر و معادله

درس ۱: دنبالهٔ حسابی ۷
درس ۲: دنبالهٔ هندسی ۱۲
درس ۳: معادلات درجه‌دوم ۱۵
درس ۴: نمودار سهمی، صفرهای تابع و حل نموداری معادله‌ها ۲۱
درس ۵: معادلات گویا و گنگ ۲۸
درس ۶: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۳۲
درس ۷: آشنایی با هندسهٔ تحلیلی ۳۷
آزمون جمع‌بندی ۴۴
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۴۵

فصل دوم: تابع

درس ۱: آشنایی بیشتر با تابع ۶۶
درس ۲: انواع توابع ـ بخش اول ۶۹
درس ۳: انواع توابع ـ بخش دوم ۷۵
درس ۴: وارون تابع ۷۸
درس ۵: اعمال روی توابع ۸۲
درس ۶: ترکیب توابع ۸۵
آزمون جمع‌بندی ۹۱
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۹۲

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس ۱: تابع نمایی ۱۰۵
درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم ۱۱۱
درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی ۱۱۷
آزمون جمع‌بندی ۱۲۴
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۱۲۵

فصل چهارم: مثلثات

درس ۱: رادیان ۱۳۶
درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا ۱۴۰
درس ۳: توابع مثلثاتی ۱۴۷
درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۱۵۱
آزمون جمع‌بندی ۱۵۵
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۱۵۶

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی ۱۶۶
درس ۲: حدهای یک‌طرفه ۱۷۱
درس ۳: قضیه‌های حد ۱۷۷
درس ۴: محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$) ۱۸۱
درس ۵: پیوستگی ۱۸۹
آزمون جمع‌بندی ۱۹۵
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۱۹۶
نمودارهای مهم ۲۱۱

امتحانات

امتحان شمارهٔ (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول ۲۱۴
پاسخ امتحان شمارهٔ (۱) :نمونه امتحان نیم‌سال اول ۲۱۵
امتحان شمارهٔ (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول ۲۱۷
پاسخ امتحان شمارهٔ (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول ۲۱۸
امتحان شمارهٔ (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم ۲۲۰
پاسخ امتحان شمارهٔ (۳) نمونه امتحان نیم‌سال دوم ۲۲۲
امتحان شمارهٔ (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم ۲۲۴
پاسخ امتحان شمارهٔ (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم ۲۲۶
امتحان شمارهٔ (۵): نهایی خرداد ۱۴۰۲ ..... ۲۲۸
پاسخ امتحان شمارهٔ (۵): نهایی خرداد ۱۴۰۲ ..... ۲۳۰
امتحان شمارهٔ (۶): نهایی خرداد ۱۴۰۳ ..... ۲۳۱
پاسخ امتحان شمارهٔ (۶): نهایی خرداد ۱۴۰۳ ..... ۲۳۳

فصل ۱: جبر و معادله

درس ۱: دنبالهٔ حسابی

یادآوری دنبالهٔ حسابی

دنباله: هر تعداد عددی که پشت سر هم بنویسیم یک دنباله ایجاد می‌کنند؛ مثل $۱,۴,۹,۱۶,\ldots$.

جملهٔ عمومی دنباله: به قانون یا الگویی که جمله‌های دنباله توسط آن تولید می‌شوند، **جملهٔ عمومی** می‌گوییم. اگر جملهٔ عمومی را داشته باشیم، با جای‌گذاری شمارهٔ جمله به جای n، جمله‌ها (عموم جمله‌ها) به دست می‌آیند، مثلاً جملهٔ عمومی دنباله‌ای که در بالا گفتیم، $a_n = n^۲$ است.

دنبالهٔ حسابی: دنباله‌هایی که در آن هر جمله با **عدد ثابتِ مثبت یا منفی** d (قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید، **دنبالهٔ حسابی** هستند. به زبان دیگر اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، برابر عدد ثابت d است؛ یعنی: $a_n - a_{n-۱} = d$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: برای نوشتن جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، دو چیز می‌خواهیم: **یکی جملهٔ اول ($a_۱$) و دیگری قدرنسبت (d)**. با جای‌گذاری این دوتا در $a_n = a_۱ + (n-۱)d$، جملهٔ عمومی به دست می‌آید. مثلاً دنبالهٔ $۴,۷,۱۰,۱۳,\ldots$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = ۳$ است و جملهٔ عمومی آن برابر است با:

$$a_n = ۴ + (n-۱)۳ \Rightarrow a_n = ۳n + ۱$$

مثال: دنبالهٔ $-۳,۱,۵,۹,\ldots$ را در نظر بگیرید:

الف) جملهٔ عمومی آن را بنویسید. **ب) جملهٔ سی و سوم دنباله، کدام است؟ جملهٔ چندم برابر ۳۳ است؟**

پاسخ: الف) جملهٔ اول که تابلو $a_۱ = -۳$ است. قدرنسبت هم $d = ۴$ *(چهار تا چهار تا داره اضافه می‌شه)* است. با جای‌گذاری در فرمول جملهٔ عمومی داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = -۳ + (n-۱)(۴) = ۴n - ۷$$

ب) جملهٔ سی و سوم، پس $n = ۳۳$ می‌گذاریم:

$$a_{۳۳} = ۴(۳۳) - ۷ = ۱۲۵$$

گفته جملهٔ چندم، پس n یا همان شمارهٔ جمله، مجهول است:

$$۴n - ۷ = ۳۳ \Rightarrow n = ۱۰$$

یعنی دهمین عدد در دنباله برابر ۳۳ است.

چند نکتهٔ تکمیلی در مورد دنباله‌های حسابی

۱) اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی باشند، جملهٔ وسط، میانگین دو جملهٔ کناری است و به آن **واسطهٔ حسابی** می‌گوییم؛ یعنی: $b = \frac{a+c}{۲}$

تذکر: اگر $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, \ldots$ تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، نه‌تنها هر جمله، میانگین دو جملهٔ کناری است، بلکه اگر به تعداد مساوی از هر جمله، عقب و جلو نیز برویم، میانگین آن دو جمله نیز خواهد بود، مثلاً نه‌تنها $a_۳ = \frac{a_۲ + a_۴}{۲}$ بلکه $a_۳ = \frac{a_۱ + a_۵}{۲}$.

۲) جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی نسبت به n، خطی (درجهٔ حداکثر یک) است؛ مثلاً به صورت $a_n = ۲n + ۳$ یا $a_n = \frac{n}{۲} - ۱$. پس اگر دنباله‌ای مثل $a_n = (k-۲)n^۲ + kn + ۱$ حسابی باشد باید کاری کنید که $n^۲$ از بین برود؛ پس $k-۲$ را برابر صفر قرار می‌دهیم تا $k = ۲$ شده و در نتیجه $a_n = ۲n + ۱$ به دست آید.

۳) می‌خواهیم بین دو عدد b و a، تعداد n عدد (واسطه) طوری قرار دهیم که همهٔ اعداد، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند. مثلاً می‌خواهیم بین دو عدد ۴ و ۸۱ تعداد شش واسطهٔ حسابی قرار دهیم. به دو روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

روش اول: با استفاده از فرمول: $d = \frac{b-a}{n+۱} = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{۱ + (\text{تعداد واسطه‌ها})} = \frac{۸۱-۴}{۷} = ۱۱$ قدرنسبت به دست می‌آید. حالا داریم:

$$۴, \boxed{۱۵}, \boxed{۲۶}, \boxed{۳۷}, \boxed{۴۸}, \boxed{۵۹}, \boxed{۷۰}, ۸۱$$

(+۱۱ +۱۱)

روش دوم: جملهٔ اول که ۴ است. ۶تا واسطه هم داریم؛ پس عدد ۸۱، جملهٔ هشتم است. با فرمول جملهٔ عمومی داریم:

$$a_۸ = ۸۱ \Rightarrow a_۱ + ۷d = ۸۱ \Rightarrow ۴ + ۷d = ۸۱ \Rightarrow d = ۱۱$$

مثال: بین دو عدد $۲a-۵$ و $۷a+۱۵$ چهار واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین واسطه برابر ۶۰ است. کل جمله‌ها را به دست آورید. ($۲a-۵$ جملهٔ اول دنباله است.)

پاسخ: داریم:

$$۲a-۵, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۷a+۱۵$$

از فرمول درج n واسطه داریم:

$$d = \frac{b-a}{n+۱} \Rightarrow d = \frac{۷a+۱۵-(۲a-۵)}{۴+۱} = \frac{۵a+۲۰}{۵} = a+۴$$

اگر $۷a+۱۵$ را منهای قدرنسبت کنیم، بزرگ‌ترین واسطه به دست می‌آید؛ یعنی:

$$۷a+۱۵-(a+۴) = ۶a+۱۱$$

اگر $۲a-۵$ را با قدرنسبت جمع کنیم، کوچک‌ترین واسطه به دست می‌آید؛ یعنی:

$$۲a-۵+(a+۴) = ۳a-۱$$

حالا:

$$۶a+۱۱-(۳a-۱) = ۶۰ \Rightarrow ۳a+۱۲ = ۶۰ \Rightarrow ۳a = ۴۸ \Rightarrow a = ۱۶$$

با جای‌گذاری $a = ۱۶$ جمله‌ها عبارت‌اند از:

$$۲۷, ۴۷, ۶۷, ۸۷, ۱۰۷, ۱۲۷$$

(+۲۰)

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی

خب درس اول از این‌جا شروع می‌شود. *(قبلی‌ها یادآوری از سال دهم بود!)* می‌خواهیم مجموع جمله‌های اول تا nامِ دنبالهٔ حسابی را به دست آوریم. قبل از این‌که به فرمول اصلی برسیم، می‌خواهیم فرمولی برای جمع اعداد متوالی از ۱ تا n یعنی $1+2+3+\cdots+n$ به دست آوریم. *(چون قراره ازش استفاده کنیم)*

با من همراه بشوید: $\Rightarrow S=1+2+\cdots+n$ جمع اعداد را S می‌نامیم **:مرحله اول**

:مرحله دوم همین اعداد را از آخر به اول می‌نویسیم $\Rightarrow S=n+(n-1)+\cdots+1$

:مرحله سوم دو سطر بالا را با هم جمع می‌کنیم $\Rightarrow 2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{تا}}$

$$\Rightarrow S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(\text{یکی بیشتر از آخری})(\text{آخری})}{2}$$

مثلاً: $1+2+\cdots+50=\frac{50\times 51}{2}=1275$ یا $1+2+\cdots+10=\frac{10\times 11}{2}=55$

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a_n را با S_n نمایش می‌دهیم. داریم:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+(n-1)d)$$

$$=na_1+\underbrace{(1+2+3+\cdots+(n-1))}_{\text{فرمول جمع اعداد متوالی}}d=na_1+\frac{\overbrace{(n-1)}^{\text{آخری}}\overbrace{(n)}^{\text{یکی‌بیشتر}}}{2}d=\frac{2na_1+(n-1)(n)d}{2}=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

بنابراین به خاطر بسپارید که:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\text{مجموع } n \text{ جملهٔ } \textbf{اول} \text{ دنبالهٔ حسابی}$$

فرمول دوم S_n حسابی:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n})=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\text{میانگین اولی و آخری}\times\text{تعداد}$$

نتیجه: میانگین جمله‌های دنباله‌های حسابی برابر با میانگین جملهٔ اول و آخر است.

تذکر: رابطهٔ دوم بیشتر وقتی به درد می‌خورد که جمله‌های اول و آخر را داشته باشیم.

مثال: مجموع جملات دنبالهٔ حسابی $1,3,5,7,\ldots,199$ را به دست آورید. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

پاسخ: اول باید تعداد جملات را به دست آوریم؛ یعنی ببینیم ۱۹۹، چندمین جملهٔ دنباله است:

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow 199=1+(n-1)(2)\Rightarrow 198=2n-2\Rightarrow 200=2n\Rightarrow n=100$$

حالا کافی است مجموع ۱۰۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲ را پیدا کنیم: $S_{100}=\frac{100}{2}(a_1+a_{100})=\frac{100}{2}(1+199)=10000$

مثال: دنبالهٔ حسابی $-3,2,7,\ldots$ را در نظر بگیرید:

الف) مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

ب) مجموع $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$ را به دست آورید.

پ) مجموع n جملهٔ اول (همون S_n) را بیابید.

ت) مجموع $a_2+a_4+\cdots+a_{20}$ را بیابید.

پاسخ:

الف $a_1=-3$ و $d=5$ است، پس: $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow S_{20}=\frac{20}{2}(2(-3)+19(5))=890$

ب جمع جمله‌های اول تا بیستم، برابر ۸۹۰ شد اما برای محاسبهٔ $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$ باید جمع جمله‌های اول تا دهم (یعنی S_{10}) را از جمع جمله‌های اول تا بیستم کم کنیم:

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=S_{20}-S_{10}=890-\underbrace{\frac{10}{2}(2(-3)+9(5))}_{195}=695$$

توجه: به جمع $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$ مجموع **ده جملهٔ دوم** هم می‌گوییم *(اگه جایی دیدید وحشت نکنید!)*. جمع‌بندی بخش (الف) و (ب) این شد که برای جمع جملات از یک تا n فرمول داریم. اگر آن وسطها، جمعی را خواستید باید S_n را از قبلی‌ها کم کنید.

پ $S_n=\frac{n}{2}(2(-3)+(n-1)(5))=\frac{n}{2}(5n-11)=\frac{5n^2}{2}-\frac{11}{2}n$

بد نیست بدانید دنبالهٔ مجموع (S_n) همواره از درجهٔ حداکثر ۲ *(نه بیشتر!)* درمی‌آید.

ت جمع تعدادی جملهٔ شماره زوج را می‌خواهیم. به a_2، a_4 و ... دقت کنید:

$$-3,\boxed{2},7,\boxed{12},17,\boxed{22},\ldots \quad (+10,+10)$$

خودشان یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $10=2\times 5$ هستند. مجموع ده‌تا از این جمله‌ها را می‌خواهیم.

$$a_2+a_4+\cdots+a_{20}=\frac{10}{2}(2(2)+9(10))=470$$

مثال: مجموع دوازده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر ۱۳۸ و جملهٔ ششم آن برابر ۱۰ است. مجموع صد جملهٔ اول دنباله را بیابید.

پاسخ: گفتم تا a_1 و d را نداشته باشیم کاری نمی‌توانیم بکنیم. پس اول آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع ۱۲ جملهٔ اول} = S_{12} = 138 \Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138$$

$$\text{جملهٔ ششم} = a_6 = 10 \Rightarrow a_1 + 5d = 10 \xrightarrow{\times(-12)}$$

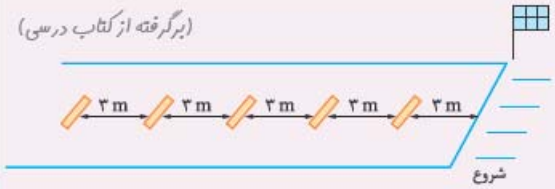
$$\begin{cases} 12a_1 + 66d = 138 \\ -12a_1 - 60d = -120 \end{cases}$$

$$6d = 18 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -5$$

حالا S_{100}:

$$S_{100} = 50(-10 + 99(3)) = 14350$$

مثال: ۵ چوب به فاصلهٔ ۳متری در یک خط مستقیم قرار دارد. هر فرد باید از نقطهٔ شروع حرکت کرده، چوب اول را برداشته و دوباره برگشته و در مکان شروع قرار گیرد. برای چوب‌های بعدی هم همین‌طور. محاسبه کنید برای برداشتن همهٔ چوب‌ها چه مسافتی طی می‌شود؟



پاسخ: برای برداشتن چوب اول ۳ متر جلو و ۳ متر هم برمی‌گردیم؛ پس در کل ۶ متر را طی می‌کنیم. برای برداشتن چوب دوم ۶ متر می‌رویم و ۶ متر برمی‌گردیم؛ پس ۱۲ متر. به همین ترتیب برای چوب بعدی ۱۸ متر. کافی است مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با $a_1 = 6$ و $d = 6$ را به دست آوریم:

$$S_5 = \frac{5}{2}(12 + 4(6)) = 90\ \text{m}$$

مثال: مجموع اعداد سه‌رقمی را به دست آورید که در تقسیم بر ۶، باقی‌مانده‌ای برابر یک دارند.

پاسخ: عدد ۱۰۲ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است، پس بر ۶ بخش‌پذیر است؛ بنابراین ۱۰۳ اولین عدد سه‌رقمی است که در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. در انتها نیز عدد ۹۹۶ بر ۶ بخش‌پذیر است، پس آخرین عدد مطلوب ۹۹۷ است؛ بنابراین کافی است مجموع اعداد مقابل را پیدا می‌کنیم:

$$\overset{+6}{\frown}\ \overset{+6}{\frown}$$
$$103\ ,\ 109\ ,\ 115\ ,\ \dots\ ,\ 997$$

اول باید تعداد اعداد را پیدا کنیم؛ یعنی باید ببینیم ۹۹۷ چندمین جمله است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 103 + (n-1)(6) \Rightarrow 997 = 103 + (n-1)(6) \Rightarrow \frac{997-103}{6} = n-1 \Rightarrow n-1 = 149$$

$$\Rightarrow n = 150$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{150} = \frac{150}{2}(103 + 997) = 82500$$

به دست آوردن دنباله از روی S_n

روش اول: فرض کنید مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = 3n^2 - 4n$ به دست آید. می‌خواهیم از روی این دنباله، جملهٔ عمومی دنباله را بنویسیم. برای این کار، نیاز داریم به a_1 و d. اگر $n = 1$ قرار دهیم مجموع یک جملهٔ اول (S_1) یا همان a_1 به دست می‌آید:

$$S_1 = a_1 = -1$$

اگر $n = 2$ قرار دهیم مجموع دو جملهٔ اول به دست می‌آید، یعنی:

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3(2)^2 - 4(2) = 4$$

اگر $a_1 = -1$ قرار دهیم $a_2 = 5$ به دست می‌آید، حالا $d = a_2 - a_1 = 6$. با داشتن قدرنسبت و جملهٔ اول، جملهٔ عمومی نوشته می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -1 + (n-1)(6) = 6n - 7$$

نکته: d همواره دو برابر ضریب n^2 است. در مثال بالا، ضریب n^2 برابر ۳ بود، پس $d = 6$ می‌شود.

روش دوم: اگر جمع اعداد از شمارهٔ ۱ تا n را از جمع اعداد از شمارهٔ ۱ تا $n-1$ کم کنیم، جملهٔ nام یا a_n به دست می‌آید؛ یعنی:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

پس:

$$S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 4n - \underbrace{(3(n-1)^2 - 4(n-1))}_{\text{(به‌جای } n \text{ باید } n-1 \text{ بذاریم)}} = 3n^2 - 4n - (3n^2 - 10n + 7) = 6n - 7$$

مثال: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = kn^3 + n^3 + 2n^2 + n$ به دست می‌آید. جملهٔ دهم دنباله را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به فرمول S_n، حداکثر درجهٔ n در فرمول S_n برابر ۲ است. پس باید کاری کنیم تا جملهٔ درجه‌سوم از بین برود، بنابراین $k = -1$.

حالا داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{10} &= 2(10)^2 + 10 = 210 \\ S_9 &= 2(9)^2 + 9 = 171 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{10} = \overbrace{(a_1 + \dots + a_{10})}^{S_{10}} - \overbrace{(a_1 + \dots + a_9)}^{S_9} = 210 - 171 = 39$$

جمع‌بندی فرمول‌های دنبالهٔ حسابی

	رابطهٔ ریاضی	نکات
جملهٔ عمومی	$a_n = a_1 + (n-1)d$	جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی نسبت به n، درجه‌اول است.
ارتباط دو جملهٔ متوالی	$a_n - a_{n-1} = d$	اختلاف هر دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی برابر d است.
ارتباط هر دو جمله	$a_n - a_m = (n-m)d$	از t_n تا t_m به تعداد $(n-m)$ تا قدرنسبت فاصله است.
سه جملهٔ متوالی a,b,c	$b = \frac{a+c}{2}$	وسطی میانگین حسابی دوتا کناری‌ها می‌شود.
درج n واسطهٔ $a \square \square \dots \square b$	$d = \frac{b-a}{n+1}$	قدرنسبت برابر با $\frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{تعداد واسطه‌ها} + 1}$ می‌شود.
شکل سه جملهٔ متوالی	$x-d, x, x+d$	سه جملهٔ مجهول دنبالهٔ حسابی را بهتر است این‌جوری بگیریم.
مجموع n جملهٔ اول	$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	فرمول S_n نسبت به n درجه‌دوم درمی‌آید.

در امتحان نهایی چه خبر؟

تیپ ۱ مجموع n جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی از شما خواسته می‌شود یا بالعکس آن، مجموع داده شده و تعداد جمله‌ها خواسته می‌شود. فرقی نمی‌کند، در هر دو حالت از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ یا $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ استفاده کرده و خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

حالا توحل کن: سؤال‌های ۱ تا ۱۵ و ۲۱، ۲۲، ۲۳ و ۲۴

تیپ ۲ دو رابطه در مورد جملهٔ عمومی دنباله یا مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی داده شده است. از روی فرمول a_n و S_n، دو رابطه را تشکیل داده و با حل دستگاه، a_1 و d را به دست آورید و بعد هم خواستهٔ مسئله.

حالا توحل کن: سؤال‌های ۱۶ تا ۲۰ و ۲۵ تا ۲۸

تیپ ۳ جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی را دسته‌بندی کرده و مجموع جملات فلان دسته را می‌خواهد. کافی است پیدا کنید که آن دسته با چه عددی شروع شده و چند جمله دارد تا از فرمول S_n، مجموع جمله‌های آن دسته را پیدا کنید.

حالا توحل کن: سؤال‌های ۲۹ و ۳۰

سؤال‌های امتحانی

سؤالاتی که علامت دارن سفت‌ترین سؤال‌های هر درس هستن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، بعد از تسلط روی سؤالای دیگه برو سراغ اون‌ها.

گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید.

۱- قدرنسبت جمله‌های ردیف زوج دنبالهٔ $-1, 3, 7, \dots$ برابر است با:

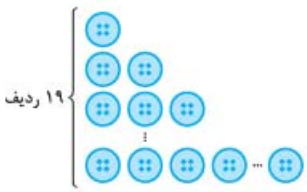
۱) ۴ ۲) ۸

۲- اگر $S_n = n^2 + n$ مجموع n جملهٔ اولِ یک دنبالهٔ حسابی باشد، جملهٔ دوم دنباله برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۶

۳- ۱۹ ردیف دکمه به صورت مقابل چیده شده‌اند. تعداد دکمه‌ها برابر است با:

۱) ۱۹۰ ۲) ۱۷۱



(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۴- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d)$ به دست می‌آید.

۵- حاصل عبارت $100 + \dots + 6 + 4 + 2$ برابر ۲۵۰۰ است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

۶- مجموع ۵ جمله اول از دنبالهٔ حسابی $x, 7, 12, \dots$ برابر ۶۰ است. *(نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

■ جاهای خالی را با عبارت‌ها یا کلمه‌های مناسب پر کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۷- جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 3n - 1$ است. با جمع ..... جمله از ابتدای دنباله، حاصل برابر ۶۱۰ می‌شود.

۸- ۱۰ نقطهٔ متمایز روی محیط دایره‌ای قرار دارد. از هر نقطه به نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم. تعداد ..... وتر به دست می‌آید.

۹- مجموع همهٔ عددهای طبیعی دورقمی مضرب ۴ برابر ..... است.

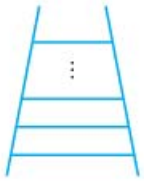
■ مجموع ۲۰ جملهٔ اول هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

۱۰- $-5, -3, -1, \ldots$ (نهایی خرداد ۹۷)

۱۱- $a_n = 3n - 1$

۱۲- چند جمله از دنبالهٔ $1, 4, 7, 10, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل برابر ۱۷۶ شود؟ (مشابه کتاب درسی ـ برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۳- اندازهٔ پله‌های یک نردبان به طور یکنواخت از ۴۵ سانتی‌متر به ۳۰ سانتی‌متر می‌رسد. اگر مجموع طول پله‌ها ۴/۵ متر باشد، تعداد پله‌های نردبان را به دست آورید.



۱۴- در دنبالهٔ حسابی $-1, 2, 5, \ldots$ حداقل چند جملهٔ آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟ (نهایی خرداد ۹۵ ـ مشابه کتاب درسی)

۱۵- در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟ (نهایی خرداد ۱۴۰۲)

۱۶- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۲۰ جملهٔ اول، سه برابر مجموع ۱۲ جملهٔ اول است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۱۷- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع پنج جملهٔ بعدی برابر ۳۵ است. مجموع پنجاه جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۱۸- در یک دنبالهٔ حسابی $S_n = n(4n - 1)$ است.

الف) مجموع ده جملهٔ اول را بیابید.

ب) مجموع $a_{15} + \cdots + a_7 + a_6$ را بیابید.

پ) جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

۱۹- از بین ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $-7, -4, -1, \ldots$ مجموع جمله‌های ردیف زوج و مجموع جمله‌های ردیف فرد را به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

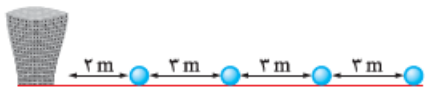
۲۰- در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جمله‌های ردیف فرد برابر ۵۳۰ و مجموع جمله‌های ردیف زوج برابر ۵۹۰ است. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید. (مشابه کتاب درسی)

■ حاصل‌جمع‌های زیر را به دست آورید.

۲۱- مجموع اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶. (مشابه کتاب درسی)

۲۲- مجموع اعداد دورقمی که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

۲۳- تعدادی توپ و یک سبد مطابق شکل روی یک خط مستقیم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد ۲ m و فاصلهٔ بقیهٔ توپ‌ها از یکدیگر ۳ m است. دونده‌ای از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته و تا سبد برگشته و توپ را درون سبد می‌اندازد. او این عمل را برای بقیهٔ توپ‌ها هم انجام می‌دهد. اگر این دونده در مجموع ۳۷۴ متر دویده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟ (مشابه کتاب درسی)



۲۴- با استفاده از فرمول S_n و بار دیگر با استفاده از یک مربع $n \times n$ نشان دهید: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

۲۵- جملهٔ ششم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۱۰ است. مجموع یازده جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۲۶- بین دو عدد ۳ و ۴۷، تعداد ۱۰ واسطهٔ حسابی قرار می‌دهیم. مجموع واسطه‌ها را به دست آورید.

۲۷- زوایای داخلی یک ۵ضلعی محدب برحسب درجه، تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت 6° باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ ۵ضلعی را به دست آورید.

۲۸- یک دنبالهٔ حسابی ۱۰۰ جمله دارد. اگر جمع سه جملهٔ اول با سه جملهٔ آخر برابر ۱۵۰ باشد، مجموع همهٔ جمله‌ها چه‌قدر است؟

۲۹- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که دستهٔ اول یک عضو، دستهٔ دوم دو عضو و ... : یعنی $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \ldots$. مجموع اعداد دستهٔ بیستم را به دست آورید.

۳۰- اعداد طبیعی مضرب ۳ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد: یعنی: $\{3\}, \{6, 9\}, \{12, 15, 18\}, \ldots$. مجموع اعداد واقع در دستهٔ پانزدهم کدام است؟

درس ۲: دنبالهٔ هندسی

یادآوری دنبالهٔ هندسی

دنباله‌هایی را که در آن‌ها، هر جمله در عدد ثابت q، ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید، **دنباله‌های هندسی** می‌نامیم.

نکته: در هر دنبالهٔ هندسی، تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی همان قدرنسبت است؛ یعنی $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ (مثلاً $\frac{a_{10}}{a_9} = q$) و تقسیم دو جملهٔ غیرمتوالی برابر است با: $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$ (مثلاً $\frac{a_7}{a_3} = q^4$)

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی برای نوشتن جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی هم، نیاز به دو چیز داریم: یکی جملهٔ اول (a_1) و دیگری قدرنسبت (q). در این صورت جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌شود:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad , (q, a_1 \neq 0)$$

مثلاً دنبالهٔ $2, 4, 8, \ldots$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q = 2$ است که جملهٔ عمومی آن برابر است با: $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت، جملهٔ هشتم و جملهٔ چهارم به ترتیب برابر ۸۱ و ۹ هستند. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

پاسخ: برای نوشتن جملهٔ عمومی دنباله، باید a_1 و q را به دست آوریم. برای این کار دو معادله را نوشته و با حل دستگاه، a_1 و q را به دست می‌آوریم. یادتان باشد دستگاه‌هایی که در این‌جا به وجود می‌آیند، معمولاً با تقسیم دو طرف بر هم حل می‌شوند.

$$\begin{matrix} a_8 = 81 \Rightarrow a_1 q^7 = 81 \\ a_4 = 9 \Rightarrow a_1 q^3 = 9 \end{matrix} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_1 q^7}{a_1 q^3} = 9 \Rightarrow q^4 = 9 \xrightarrow{q>0} q = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم داریم:

$$a_1 (\sqrt{3})^3 = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

پس جملهٔ عمومی می‌شود:

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^{n-1} = \sqrt{3}^n$$

یادآوری چند نکته از دنبالهٔ هندسی

۱) اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه b واسطهٔ هندسی بین a و c است و داریم: $b^2 = ac$

۲) می‌خواهیم بین دو عدد a و b، تعداد n عدد (واسطه) طوری قرار دهیم که همهٔ اعداد، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند. مثلاً می‌خواهیم بین دو عدد ۲ و ۱۲۸، تعداد ۵ واسطهٔ هندسی قرار دهیم. به دو روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

روش اول: استفاده از فرمول $q^{n+1} = \frac{c}{a}$ که n تعداد واسطه‌ها و c عدد آخر و a عدد اول است:

$$q^{5+1} = \frac{128}{2} = 64 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$$

روش دوم: با استفاده از جملهٔ عمومی:

$$a_7 = 128 \Rightarrow a_1 q^6 = 128 \Rightarrow q^6 = \frac{128}{2} = 64$$

داریم: $2, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 128$؛ پس ۱۲۸ جملهٔ هفتم است، یعنی:

۳) اگر سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی مجهول باشد، بهتر است آن‌ها را به صورت $\frac{a}{q}, a, aq$ در نظر بگیریم.

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

می‌خواهیم جمع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q را به دست آوریم. فرض کنید $q \neq 1$ باشد:

مرحله اول: جمع n جمله را برابر S قرار می‌دهیم. $\Rightarrow S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$

مرحله دوم: دو طرف را در q ضرب می‌کنیم. $\Rightarrow qS = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$

مرحله سوم: دو طرف رابطهٔ بالا را کم می‌کنیم. $\Rightarrow S - qS = a_1 - a_1 q^n$ *(از بالایی فقط اولی و از پایینی آخری می‌مونه)*

$$\Rightarrow (1-q)S = a_1(1-q^n) \Rightarrow S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

به خاطر بسپارید:

$$\text{مجموع } n \text{ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی} = S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

تذکر ۱: یک‌وقت به سرتان نزند بنویسید $\frac{a_1(1-q)^n}{1-q}$ *(دیدم که می‌گم!)*؛ توان n فقط برای q است.

تذکر ۲: اگر $q = 1$ باشد، همهٔ جمله‌ها برابر هستند. مثلاً دنباله به صورت $a, a, a, \ldots$ بوده است. خب! جمع n جمله می‌شود na.

مثال: مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را بیابید. $1,-2,4,-8,\dots$

پاسخ: $a_1=1$ و $q=-2$، پس:

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=\frac{1-1024}{3}=-341$$

یک وقت به سرتان نزند بنویسید $1-(-2)^{10}$ *(دیدم که می‌گم!)*؛ در ترتیب عملیات، توان جلوتر از جمع و تفریق است.

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

پاسخ: دو معادله را نوشته و با استفاده از فرمول S_n آن‌ها را باز می‌کنیم:

$$S_3=136 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=136$$
$$S_6=153 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=153$$

$$\xrightarrow{\text{گفتم با تقسیم حل می‌شه!}} \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=\frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3}=\frac{153}{136}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت تشنا می‌زنه با مزدوج}} \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3}=\frac{153}{136} \Rightarrow q^3=\frac{153}{136}-1=\frac{17}{136}=\frac{1}{8} \Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

مثال: برای محافظت از تابش مواد زیان‌آور رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. چند لایه استفاده کنیم تا شدت تابش مواد زیان‌آور حداقل ۹۹٪ کاهش یابد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

پاسخ: بگذارید سؤال را این‌جوری بگویم. چه‌قدر از مواد زیان‌آور را دور بریزیم تا بیشتر از ۹۹٪ آن دور ریخته شود؟

اول $\frac{1}{2}$ را دور می‌ریزیم. بعد از $\frac{1}{2}$ باقی‌مانده، $\frac{1}{2}$ آن را دور می‌ریزیم، پس $\frac{1}{4}$ از کل حذف می‌شود. به همین ترتیب در مرحلهٔ nام $(\frac{1}{2})^n$ حذف می‌گردد. مجموع مواد زیان‌آوری که دور ریختیم باید از ۹۹٪ بیشتر شود، پس:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+(\frac{1}{2})^n}_{\substack{\text{مجموع } n \text{ جملهٔ اول}\\ \text{دنبالهٔ هندسی با } q=\frac{1}{2}}} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\frac{99}{100}>(\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{100}>(\frac{1}{2})^n$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{دو طرف را}\\ \text{معکوس می‌کنیم}}} 100<2^n \xrightarrow{\text{(با جستجو)}} n\geq 7$$

یعنی حداقل باید از ۷ لایه، عبور بدهیم.

تعمیم (گسترش) اتحاد مزدوج و چاق و لاغر در اتحاد مزدوج و چاق و لاغر داشتیم $a^2-1=(a-1)(a+1)$ و $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$.

می‌خواهیم ببینیم اگر سمت چپ a^n-1 باشد، طرف راست به چه شکلی درمی‌آید. ببینید:

$$\underbrace{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}_{\substack{\text{مجموع } n \text{ جملهٔ اول}\\ \text{دنبالهٔ هندسی با } q=a}}=\underbrace{\frac{1-a^n}{1-a}}_{\substack{\text{(صورت و مخرج}\\ \text{منفی فاکتور)}}}=\frac{a^n-1}{a-1} \Rightarrow a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+1)$$

مثلاً:

$$a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1) \quad \text{یا} \quad a^7-1=(a-1)(a^6+a^5+a^4+\dots+1)$$

مثال: کسر $\frac{x^{20}-1}{x^4-1}$ را طوری ساده کنید که برابر با یک چندجمله‌ای شود.

پاسخ: طبق اتحاد $x^{20}-1=(x-1)(x^{19}+x^{18}+\dots+1)$ و $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$، اما برای این‌که مخرج به طور کامل ساده شود به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x^{20}-1=(\underbrace{x^4}_{a})^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)=(x^4-1)(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)$$

پس با ساده‌شدن x^4-1 از صورت و مخرج، حاصل کسر برابر $x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1$ می‌شود.

مثال: اگر n فرد باشد، ثابت کنید $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots+1)$.

پاسخ: فرض کنیم n فرد باشد.

دنبالهٔ $1,-a,a^2,-a^3,\dots,a^{n-1}$، n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با $a_1=1$ و $q=-a$ است؛ پس داریم:

$$1-a+a^2+\dots+a^{n-1}=\frac{(a_1)(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-(-a)^n}{1-(-a)}=\frac{1+a^n}{1+a}$$

دقت دارید که چون n فرد است، $(-a)^n=-a^n$ می‌شود.

به خاطر بسپارید که:

n فرد: $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots+1)$

جمع‌بندی فرمول‌های دنبالهٔ هندسی

	رابطهٔ ریاضی	توضیح فارسی
جملهٔ عمومی	$a_n = aq^{n-1}$	جملهٔ nام دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q
ارتباط دو جملهٔ متوالی	$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$	تقسیم هر جملهٔ دنبالهٔ هندسی بر جملهٔ قبلی برابر قدرنسبت می‌شود.
ارتباط هر دو جمله	$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$	تقسیم جملهٔ nام بر mام دنبالهٔ هندسی
سه جملهٔ متوالی a,b,c	$b^2 = ac$	اگر a,b,c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، مربع وسطی برابر با حاصل‌ضرب کناری‌ها می‌شود.
درج n واسطه $a\square\square\cdots\square b$	$q^{n+1} = \frac{b}{a}$	برای درج n واسطهٔ هندسی بین a و b، قدرنسبت از این رابطه به دست می‌آید.
شکل سه جملهٔ متوالی	$\frac{a}{q}, a, aq$	سه جملهٔ متوالی و مجهول دنبالهٔ هندسی را بهتر است این‌جوری بگیریم.
مجموع n جملهٔ اول	$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$	مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a و قدرنسبت q
تجزیهٔ $a^n - 1$	$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$	برای ساده‌سازی کسرها از آن استفاده کنید.

در امتحان نهایی چه خبر؟

تیپ ۱ مجموع جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی از شما خواسته می‌شود. a_1 و q را به دست آورید و از $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ یا $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ استفاده کنید. این دو فرمول کاملاً یکسان هستند، اما اگر $-1 < q < 1$ باشد بهتر است از اولی و اگر $q > 1$ بهتر است دومی را بنویسید.

حالا توحل کن: سؤال‌های ۳۱ تا ۴۲ و ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹ و ۵۲

تیپ ۲ مجموع n جمله و $2n$ جملهٔ دنبالهٔ هندسی داده شده است. از فرمول S_n هر دو رابطه بنویسید و بعد بر هم تقسیم کنید. برای پیداکردن q، حواستان به اتحاد مزدوج باشد.

حالا توحل کن: سؤال‌های ۴۳، ۴۴، ۴۵

تیپ ۳ ترکیب دنبالهٔ حسابی و هندسی است. مثلاً برخی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند (یا برعکس) شکل جمله‌ها در دنبالهٔ اولیه را در نظر می‌گیریم. رابطهٔ بین آن‌ها وقتی تشکیل دنبالهٔ دوم را می‌دهند را می‌نویسیم تا مجهولات به دست آید.

حالا توحل کن: سؤال‌های ۵۰، ۵۱ و ۵۳

سؤال‌های امتحانی

گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید.

۳۱- در خانهٔ اول شطرنج، یک گندم و در خانهٔ بعدی دو برابر تعداد قبلی گندم گذاشته‌ایم. تعداد کل گندم‌ها برابر است با:

۱) $2^{63} - 1$ ۲) $2^{64} - 1$

۳۲- حاصل $\sqrt{2}^{11} + \cdots + \sqrt{2}^5 + \sqrt{2}^3 + \sqrt{2}$ برابر با کدام است؟

۱) $63\sqrt{2}$ ۲) $64\sqrt{2}$

۳۳- حاصل $-128 + \cdots - 8 + 4 - 2 + 1$ برابر با کدام است؟

۱) -85 ۲) -255

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۳۴- حاصل مجموع $\frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$ برابر $\frac{127}{64}$ است.

۳۵- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q از رابطهٔ $S_n = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$ به دست می‌آید.

۳۶- اگر مجموع n جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = \frac{1}{6}(3^n - 1)$ به دست آید، جملهٔ دوم دنباله برابر $\frac{4}{3}$ است.

■ جای خالی را به درستی تکمیل کنید.

۳۷- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $-\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۲}, ۱, \ldots$ برابر ..... است.

۳۸- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $۱+\frac{۱}{۲}, ۳+\frac{۱}{۴}, ۵+\frac{۱}{۸}, ۷+\frac{۱}{۱۶}, \ldots$ برابر ..... است.

۳۹- ساده‌شدهٔ کسر $\frac{a^۵-۱}{a-۱}$ برابر ..... است.

۴۰- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = \frac{۲^{n-۱}}{۳}$ را به دست آورید.

۴۱- مجموع چند جمله از دنبالهٔ هندسی $۶, -۱۲, ۲۴, \ldots$ برابر -۱۲۶ است؟ (نهایی خرداد ۹۰)

۴۲- حداقل چند جمله از دنبالهٔ $۱, ۳, ۹, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۳- مجموع جمله‌های اول و سوم در یک دنبالهٔ هندسی برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول را بیابید.

۴۴- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۳۶ و مجموع سه جملهٔ بعدی ۱۷ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

۴۵- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع شش جملهٔ اول دنباله ۹ برابر مجموع سه جملهٔ اول آن است. مجموع ده جملهٔ اول این دنباله چند برابر مجموع پنج جملهٔ اول آن است؟ (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

۴۶- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود؟ (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

۴۷- حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ $۲, ۲\sqrt{۲}, ۴, \ldots$ را به دست آورید.

۴۸- توپی را از ارتفاع ۵۰ متری رها می‌کنیم تا در یک مسیر مستقیم با زمین برخورد کند. بعد از هر بار برخورد توپ با زمین، $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. وقتی توپ برای بار هفتم با زمین برخورد می‌کند، چه مسافتی را پیموده است؟ (مشابه کتاب درسی)

۴۹- حاصل $A = (۱+x+x^۲+\cdots+x^۸)(۱-x+x^۲-\cdots+x^۸)$ را به ازای $x=\sqrt{۲}$ به دست آورید. (برگرفته از کنکور سراسری)

۵۰- جمله‌های سوم، هفتم و نهم از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر صفر است؟

۵۱- جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جمله‌های مثبت برابر با جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی است. اگر جملهٔ دوم دنبالهٔ هندسی برابر با جملهٔ چهارم دنبالهٔ حسابی و جملهٔ سوم دنبالهٔ هندسی برابر با جملهٔ شانزدهم دنبالهٔ حسابی باشد، مجموع شش جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ هندسی چند برابر جملهٔ اول آن است؟ (دنباله‌های هندسی و حسابی غیرثابت‌اند.) (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۵۲- اگر مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی a_n برابر با $S_n = ۴ - \frac{(-۱)^n}{۲^{n-۲}}$ باشد، حاصل $a_۲ + a_۴ + a_۶ + \cdots + a_{۲۰}$ را به دست آورید.

۵۳- جمله‌های دوم و چهارم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ناصفر و جملهٔ اول ۱ به ترتیب جمله‌های سوم، پنجم و هفتم یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت هستند. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی کدام است؟

درس ۳: معادلات درجه‌دوم

یادآوری روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$

در صورت برخورد با معادلهٔ درجه‌دوم **به ترتیب** (*گفتم به ترتیب نه این‌که سریع بری* Δ) روش‌های زیر را امتحان کنید.

۱ اگر جمع ضرایب برابر صفر باشد؛ یعنی $a+b+c=۰$، یکی از ریشه‌ها $x_۱=۱$ و دیگری $x_۲=\frac{c}{a}$ است.

مثلاً جمع ضرایب معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۳=۰$ برابر صفر است $(۰=۳-۵+۲)$؛ پس $x_۱=۱$ و $x_۲=\frac{۳}{۲}$.

۲ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x_۱=-۱$ و دیگری $x_۲=-\frac{c}{a}$ است.

مثلاً جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x+۱=۰$ به صورت $x_۱=-۱$ و $x_۲=-\frac{۱}{۲}$ است.

۳ **روش تجزیه:** **الف** اگر $a=۱$ (*ضریب* $x^۲$) باشد، با اتحاد یک جملهٔ مشترک به راحتی تجزیه می‌کنید.

مثلاً: $x^۲-۵x+۶=۰ \xrightarrow{\text{دو عدد پیدا کنید که } -۵=\text{جمع و } ۶=\text{ضرب}} -۲,-۳ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۳ \end{cases}$

ب **روش ac:** اما اگر $a\neq ۱$ باشد، یک روش خوب و سریع به اسم ac در این‌جا وجود دارد. (*البته می‌توانی با* Δ *هم بری.*) روی دو مثال ببینید:

مثلاً: $۲x^۲+۵x-۳=۰ \xrightarrow{\text{a را در c ضرب کرده و a را حذف کنید.}} x^۲+۵x-۶=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه کنید.}} (x+۶)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۶=۰ \Rightarrow x=-۶ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$

حالا دو جواب به دست آمده را بر a (یعنی ۲) تقسیم می‌کنیم:

$x=\frac{۱}{۲}, x=\frac{-۶}{۲}=-۳$

مثلاً: $۶x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \\ x=۲ \end{cases} \xrightarrow{\div ۶} \begin{cases} x=-\frac{۱}{۲} \\ x=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$

۴ روش Δ (کلی): اول $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست می‌آوریم:

الف اگر $\Delta > 0$ باشد، دو ریشه از رابطهٔ $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آید.

ب اگر $\Delta = 0$ باشد، دو ریشهٔ بالا تبدیل به یک ریشهٔ مضاعف $-\frac{b}{2a}$ می‌شود.

پ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

۵ روش مربع کامل: دو طرف را بر a تقسیم می‌کنیم. $(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0)$ $\frac{c}{a}$ را به طرف دیگر می‌بریم $(x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a})$ به دو طرف عدد $(\frac{b}{2a})^2$ را اضافه می‌کنیم تا سمت چپ مربع کامل شود.

مثلاً:

$$2x^2 + 8x - 1 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 8x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + 8x = \frac{1}{2} \xrightarrow{+16} x^2 + 8x + 16 = \frac{33}{2}$$

$$(x+4)^2 = \frac{33}{2} \Rightarrow x + 4 = \pm\sqrt{\frac{33}{2}} \Rightarrow x = -4 \pm \sqrt{\frac{33}{2}}$$

مثال: معادله‌های درجه‌دوم زیر را با روش خواسته‌شده حل کنید.

الف) $x^2 - 3x - 4 = 0$ (روش تجزیه)

ب) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (روش مربع کامل)

پ) $2x^2 - 6x - 1 = 0$ (روش کلی یا Δ)

پاسخ:

الف $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ \text{یا} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

ب $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -1 \xrightarrow{+4} x^2 - 4x + 4 = -1 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \\ x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

پ $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(2)(-1) = 44 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{4}$

مثال: یکی از جواب‌های معادلهٔ $ax^2 + 15x + 28 = 0$ برابر -4 است. جواب دیگر معادله را به دست آورید.

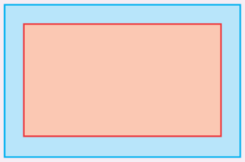
پاسخ: ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند ($x = -4$ رو می‌تونیم به جای x بگذاریم).

$$x = -4 \Rightarrow a(-4)^2 + 15(-4) + 28 = 0 \Rightarrow 16a - 32 = 0 \Rightarrow a = 2$$

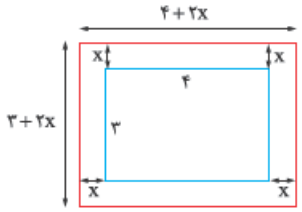
$$2x^2 + 15x + 28 = 0 \Rightarrow (x+4)(2x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \\ 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

معادلهٔ آخر را می‌توانستیم با روش Δ هم حل کنیم *(طولانی می‌شه)*، ولی با روش تجزیه راحت‌تر است. چون $x = -4$ یکی از ریشه‌ها است، پس در تجزیهٔ $2x^2 + 15x + 28$ عامل $x + 4$ داریم. همچنین در پرانتز دیگر باید جملهٔ $2x$ داشته باشیم تا با ضرب در x حاصل $2x^2$ شود. ضرب دو عدد در پرانتز نیز باید $+28$ باشد؛ پس عدد پرانتز دیگر $+7$ است.

مثال: فرشی با ابعاد ۳ در ۴ درون اتاقی مستطیل‌شکل پهن شده است. اگر فاصلهٔ لبهٔ فرش تا هر دیوار یکسان و مساحت اتاق برابر ۴۲ متر مربع باشد، فاصلهٔ لبهٔ فرش تا دیوار را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



پاسخ: فاصلهٔ لبهٔ فرش تا دیوار را x در نظر می‌گیریم؛ پس:



$$\text{مساحت اتاق} = (3+2x)(4+2x) = 42 \Rightarrow 12 + 14x + 4x^2 = 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 14x - 30 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 7x - 15 = 0$$

می‌توانیم با روش Δ معادله را حل کنیم، اما با توضیحات ابتدای درس از روش ac داریم:

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 3 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = -5 \quad \times \\ x = \frac{3}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$

فرض کنید معادلهٔ درجه‌دوم، دارای دو ریشهٔ α و β باشد (یعنی $\Delta>0$ باشد). می‌خواهیم بدون محاسبهٔ ریشه‌ها *(یووپی!)* جمع و ضرب ریشه‌ها یعنی $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به دست آوریم *(خالا خود ریشه‌ها چی‌هستن به ما ربطی نداره!)*:

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

جمع ریشه‌ها را S (از Sum به معنی جمع) و ضرب آن‌ها را P (از Product به معنی ضرب) می‌نامیم. پس:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

مثلاً در معادلهٔ $2x^2-7x-1=0$ جمع و ضرب ریشه‌ها می‌شوند:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2}\ ,\ P=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

نکته: شبیه بالا می‌توانیم نشان دهیم:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها}=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+1=0$ باشند، بدون محاسبهٔ ریشه‌ها، حاصل $\alpha^2+\beta^2$ (الف، $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (ب، $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (پ، $\alpha^3+\beta^3$ (ت، $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (ث، $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ (ج و $\alpha^2-\beta^2$ (چ (که $\alpha>\beta$) را به دست آورید.

پاسخ: قبل از همه S و P را به دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

حالا هر عبارت را به S و P ربط می‌دهیم:

الف $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=(\frac{5}{2})^2-2(\frac{1}{2})=\frac{21}{4}$

ب $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$

(حفظ باشین خوبه!)

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$
$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$$

پ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$

ت $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=(S)(S^2-2P-P)=S^3-3SP=(\frac{5}{2})^3-3(\frac{5}{2})(\frac{1}{2})=\frac{95}{8}$

ث $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=PS=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$

ج $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}=\frac{5}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}+\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{2}}$

چ $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times S=\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{17}}{4}$ (چون $\alpha>\beta$ پس $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$.)

مثال: در معادلهٔ $4x^2-16x+m=0$ یکی از ریشه‌ها دو واحد بیشتر از ریشهٔ دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه را بیابید.

پاسخ: در این مسئله‌ها S و P و رابطهٔ مسئله را بنویسید. مجهول‌ها خودشان به دست می‌آیند!

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{-16}{4}=4\\ P=\alpha\beta=\frac{m}{4}\\ \alpha=\beta+2\end{cases}$$

$\alpha=\beta+2\xrightarrow{\text{(جای‌گذاری تو تو)}}\beta+2+\beta=4\Rightarrow\beta=1\Rightarrow\alpha=3\xrightarrow{\text{(تو رومی)}}3=\frac{m}{4}\Rightarrow m=12$

مثال: α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-5=0$ هستند. حاصل عبارت‌های $\alpha^2+2\beta+5$ (الف و $\alpha^3+2\beta^2+5\beta$ (ب را بیابید.

پاسخ: *عبارت‌هایی که در مثال‌های قبلی دیدید، همگی نسبت به α و β متقارن هستند. اما در این مثال این‌گونه نیست. α و β ریشه‌های معادله هستند؛ پس در معادله صدق می‌کنند. با قراردادن α و β در معادله، رابطه‌هایی که برای محاسبهٔ هر عبارت، مفید باشند را می‌سازیم.*

α ریشه است. $\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}}\alpha^2-2\alpha-5=0\Rightarrow\alpha^2=2\alpha+5$

الف حالا $\alpha^2+2\beta+5$ را می‌خواهیم، به جای α^2 قرار می‌دهیم $2\alpha+5$؛ پس:

$$2\alpha+5+2\beta+5=2(\alpha+\beta)+10=2(-\frac{b}{a})+10=14$$

ب دیدیم: $\alpha^2=2\alpha+5\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^3=2\alpha^2+5\alpha\Rightarrow\alpha^3+2\beta^2+5\beta=2\alpha^2+5\alpha+2\beta^2+5\beta$

$$=2(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)=2(S^2-2P)+5(S)=2(4+10)+5(2)=38$$

مثال: به ازای کدام مقدار m، دو ریشهٔ معادلهٔ $(m+1)x^2+m(m^2-9)x-2=0$ قرینهٔ یکدیگرند؟ معکوس یکدیگر چه‌طور؟

پاسخ: اولاً باید $\Delta>0$ باشد تا معادله، دو ریشه داشته باشد. اگر ریشه‌ها قرینه باشند، $S=0$ می‌شود.

$$S=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow m(m^2-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} & \checkmark \\ m=3 \Rightarrow 4x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} & \checkmark \\ m=-3 \Rightarrow -2x^2-2=0 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

پس به ازای $m=0,3$، معادله دو ریشهٔ قرینه دارد. اگر دو ریشه، معکوس هم باشند، ضرب آن‌ها برابر یک است؛ یعنی $P=1$:

$$P=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a \Rightarrow m+1=-2 \Rightarrow m=-3 \xrightarrow{\text{بررسی این‌که معادله حتماً ریشه داشته باشد.}} -2x^2-2=0$$

پس به ازای این m، معادله اصلاً جواب ندارد. یعنی m وجود ندارد که به ازای آن، دو ریشه معکوس یکدیگر باشند.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-12x-a=0$ و $2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7$ باشند، مقدار a را به دست آورید. *(برگرفته از کنکور سراسری)*

پاسخ: دقت کنید که ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند. اگر به جای x عدد α را قرار دهیم، داریم:

$$3\alpha^2-12\alpha-a=0 \Rightarrow 3(\alpha^2-4\alpha)=a \Rightarrow \alpha^2-4\alpha=\frac{a}{3}$$

در عبارت داده‌شده داریم:

$$2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7 \Rightarrow \underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P}+\underbrace{\alpha^2-4\alpha}_{\frac{a}{3}}=7 \xrightarrow[P=-\frac{a}{3}]{S=-\frac{-12}{3}=4} 4^2-2(-\frac{a}{3})+\frac{a}{3}=7 \Rightarrow 16+a=7 \Rightarrow a=-9$$

تشکیل معادلهٔ درجه‌دوم

این‌جا قضیه برعکس است. ریشه‌ها را داریم و می‌خواهیم معادلهٔ درجه‌دومی بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشند؛ قُپ! خیلی ساده، معادلهٔ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ را می‌نویسیم. اگر این رابطه را ساده‌کنیم، داریم:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow \boxed{x^2-Sx+P=0}$$

یعنی کافی است اول جمع و ضرب دو ریشه را به دست بیاوریم و بعد در فرمول بالا به جای S و P جای‌گذاری کنیم.

مثلاً می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ باشد. اول S و P را به دست می‌آوریم:

$$S=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2,\ P=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1 \Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-2x+(-1)=0$$ *(معادله‌ای که ریشه‌هاش $1\pm\sqrt{2}$ هستش)*

مثال: α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ هستند. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد.

پاسخ: برای نوشتن معادله‌ای که ریشه‌هایش $x_1=\frac{\alpha}{\beta}$ و $x_2=\frac{\beta}{\alpha}$ باشد، باید x_1+x_2 و x_1x_2 را به دست آوریم. در محاسبهٔ این‌ها به S و P معادلهٔ داده‌شده برمی‌خوریم. چون که α و β ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده هستند؛ پس $S=\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$ و $P=\alpha\beta=-1$. حالا:

$$S'=x_1+x_2=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{1-2(-1)}{-1}=-3$$

$$P'=x_1x_2=(\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\beta}{\alpha})=1 \Rightarrow x^2-S'x+P'=0 \Rightarrow x^2+3x+1=0$$

به دست آوردن علامت ریشه‌ها با استفاده از S و P

فرض کنید معادلهٔ درجه‌دوم دارای دو ریشه $(\Delta>0)$ باشد. اگر جمع و ضرب این دو ریشه مثبت باشد، $(S>0$ و $P>0)$ می‌فهمیم هر دو ریشه مثبت بوده‌اند. مثلاً در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-7x+1=0$، هر سه شرط $\Delta>0$ و $S>0$ و $P>0$ برقرار است؛ پس هر دو ریشه مثبت هستند. شبیه همین داریم:

شرایط هر دو ریشهٔ مثبت	شرایط هر دو ریشهٔ منفی	شرایط یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی
$\Delta>0$	$\Delta>0$	$\Delta>0$
$S>0$	$S<0$	$P<0$
$P>0$	$P>0$	(یا ساده‌تر فقط $P<0$)

نکته: ۱ اگر $P<0$، یعنی $\frac{c}{a}<0$؛ پس a و c مختلف‌العلامت بوده و خودبه‌خود $\Delta>0$ می‌شود. پس برای این‌که معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد، شرط $P<0$ کافی است.

۲ اگر $P<0$ و $S>0$، ریشهٔ مثبت از نظر قدرمطلقی بزرگ‌تر بوده است (مثلاً دو ریشهٔ $+4$ و -1 بوده‌اند).

۳ اگر $P<0$ و $S<0$، ریشهٔ منفی از نظر قدرمطلقی بزرگ‌تر بوده است (مثلاً دو ریشهٔ -4 و $+1$ بوده‌اند).

مثال: حدود m را طوری تعیین کنید تا معادلهٔ $x^2-(m+1)x+m=0$ دو ریشهٔ متمایز مثبت داشته باشد.

پاسخ:

شرط مثبت‌بودن هر دو ریشه را نوشته و اشتراک می‌گیریم.

$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow (m+1)^2-4m>0 \Rightarrow \underbrace{m^2-2m+1}_{(m-1)^2}>0 \Rightarrow \text{(۱) به‌ازای } m\neq 1 \text{ همواره برقرار است.}\\ P>0 \Rightarrow m>0 \quad (2)\\ S>0 \Rightarrow -\frac{-(m+1)}{1}>0 \Rightarrow m+1>0 \Rightarrow m>-1 \quad (3)\end{cases}$$

اشتراک (۱)، (۲) و (۳) می‌شود $m>0$ و $m\neq 1$.

تغییر متغیر برای حل معادله‌ها

معادلهٔ $x^4-3x^2+2=0$ را در نظر بگیرید. این معادله از درجهٔ چهار است. سعی می‌کنیم کاری کنیم تا این معادله تبدیل به درجه دو شود تا بتوانیم آن را حل کنیم. یک روش خوب در برخی از مواقع، تغییر متغیر است. مثلاً اگر $x^2=t$ بگیریم $x^4=t^2$ می‌شود و معادلهٔ داده‌شده به صورت $t^2-3t+2=0$ در می‌آید. جواب‌های این معادله $t=1$ و $t=2$ است. صبر کنید کار تمام نشده است چون باید x را به دست آوریم. خب t چه بود؟ بله دوباره به جای t همان x^2 را گذاشته و x را به دست می‌آوریم:

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \qquad x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

پس معادلهٔ اولیه دارای چهار جواب ± 1 , $\pm\sqrt{2}$ است.

مثال: معادلهٔ $(\frac{x^2}{2}-1)^2+(\frac{x^2}{2}-1)-2=0$ را حل کنید. *(نهایی خرداد ۹۵)*

پاسخ: $\frac{x^2}{2}-1=t$ می‌گیریم، پس:

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow (t-1)(t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}-1=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2\\ t+2=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}-1=-2 \Rightarrow x^2=-2 \text{ . جواب ندارد.}\end{cases}$$

در امتحان نهایی چه خبر؟

تیپ ۱ از روی یک معادلهٔ درجه‌دوم باید عبارتی برحسب ریشه‌ها را به دست آورید. برای این کار، اول S و P را به دست می‌آورید و بعد با استفاده از اتحادها و تجزیه و مخرج مشترک و یا احیاناً خاصیت ریشه‌بودن α و β، عبارت خواسته‌شده را به S و P ربط می‌دهید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۵۴ تا ۷۰

تیپ ۲ یک معادلهٔ درجه‌دوم که مجهولی مثل m در آن وجود دارد، می‌دهند و m را می‌خواهند. S و P را بنویسید و از معادله‌های به دست آمده، m را پیدا کنید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۷۱ تا ۷۴

تیپ ۳ از روی ریشه‌ها باید معادلهٔ درجه دوم بنویسید. باید S و P ریشه‌ها را به دست آورده و در معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ قرار دهید. در مسیر پیداکردن S و P معادلهٔ جدید ممکن است به S و P یک معادلهٔ دیگر برخورد کنید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۷۵ تا ۸۰

تیپ ۴ علامت ریشه‌ها داده شده و شما باید شرایطی را اعمال کنید که علامت ریشه‌ها به آن صورت باشد.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۸۱ تا ۸۴

تیپ ۵ معادلهٔ شلوغ و عجیب و غریب معمولاً با تغییر متغیر حل می‌شود. عبارت مناسبی را t بگیرید تا معادله تبدیل به معادلهٔ آشنا مثل درجه‌دوم بشود. t را به دست آورده و عبارت برحسب x را مساوی جواب‌های به دست آمده برای t قرار دهید و در پایان جواب‌ها (x) را محاسبه کنید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۸۵ تا ۹۰

سؤال‌های امتحانی

گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

۵۴- جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2+\frac{x}{2}-3=0$ به ترتیب برابر است با:

۱) $-\frac{1}{2}$ و -3 ۲) $\frac{1}{2}$ و -3

۵۵- جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ به ترتیب برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ ۲) -3 و -2

۵۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-3=0$ باشند، تفاضل ریشه‌ها برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ۲) $\sqrt{13}$

■ درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۵۷- معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$ دو ریشهٔ مثبت دارد.

۵۸- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x-۱=۰$ هستند. حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ برابر ۲ است.

۵۹- در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$، اگر $\frac{c}{a}<۰$ معادله حتماً دو ریشه دارد.

■ جاهای خالی را با عبارت‌ها یا کلمه‌های مناسب پر کنید.

۶۰- $x=-۱$ ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲+ax-۷=۰$ است. ریشهٔ دیگر ..... است.

۶۱- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲+۳x-۸=۰$ مساوی ..... است. (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

۶۲- معادلهٔ درجهٔ دوم ..... دارای ریشه‌های $۳\pm۲\sqrt{۵}$ است. (نهایی خرداد ۱۴۰۲)

■ α و β ریشه‌های هر معادله هستند. حاصل عبارت خواسته‌شده در هر قسمت را به دست آورید.

۶۳- $x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow \alpha^۲+\frac{۱}{\alpha}+\beta^۲+\frac{۱}{\beta}=?$

۶۴- $x^۲-۴x-۲=۰ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta+۱}+\frac{\beta}{\alpha+۱}=?$

۶۵- $x^۲+۲x-۵=۰ \Rightarrow \alpha^۳\beta+\alpha\beta^۳=?$

۶۶- $x^۲-۷x+۴=۰ \Rightarrow \alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=?$

۶۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۵=۰$ باشد، حاصل $\alpha^۲-\alpha+\beta+\beta^۳$ را بیابید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۶۸- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-۱=۰$ است. حاصل $\frac{\alpha-\frac{۱}{\alpha}}{\beta^۳+\alpha+۳\beta^۲}$ را به دست آورید.

۶۹- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۶x+a=۰$ هستند. اگر $\alpha<\beta<۰$ و $\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$ باشد، مقدار a چه‌قدر است؟ (برگرفته از کنکور سراسری)

۷۰- اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^۲-ax-b=۰$ و $۴۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta=۱۷$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله را به دست آورید. (برگرفته از کنکور سراسری)

۷۱- در معادلهٔ $۲x^۲-۸x+m=۰$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد، m و هر دو جواب را بیابید. (نهایی خرداد ۹۲)

۷۲- m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲-۴x+۱=۰$ سه برابر ریشهٔ دیگر باشد. $(m\neq۰)$ (نهایی خرداد ۸۴)

۷۳- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-kx+۸=۰$ مربع ریشهٔ دیگر است. k و هر دو ریشه را بیابید.

۷۴- a را چنان بیابید که رابطهٔ $\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{۵}{۶}$ بین ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(a+۲)x+(a+۱)=۰$ برقرار باشد.

۷۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $۴x^۲-۵x-۵=۰$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن ۲α و ۲β باشد.

۷۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲-۲x-۱=۰$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $\frac{۱}{\beta+۱}$ باشد. (نهایی خرداد ۹۵)

۷۷- معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش از معکوس ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-x-۱=۰$ یک واحد کم‌تر باشند.

۷۸- محیط یک زمین مستطیلی شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازهٔ طول و عرض این زمین را با استفاده از معادلهٔ درجه‌دوم به دست آورید.

۷۹- طول سرامیکی از ۳ برابر عرض آن، یک سانتی‌متر کوتاه‌تر است. برای سرامیک‌کردن خانه‌ای به مساحت ۶۳ مترمربع تعداد ۱۵۰۰ سرامیک مصرف شده است. طول هر سرامیک چه‌قدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۰- هر یک از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$ دو برابر معکوس هر ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲-۷x+۳=۰$ است. مقدار a و b را بیابید.

۸۱- حدود m را چنان بیابید که معادلهٔ $(m-۶)x^۲-۲mx-۳=۰$ دارای دو ریشهٔ منفی باشد. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۸۲- اگر منحنی به معادلهٔ $y=۲x^۲-۴x+m-۳$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m را به دست آورید. (برگرفته از کنکور سراسری)

۸۳- معادلهٔ $(a^۲-۳a+۲)x^۲-(a^۲-۵a+۴)x+a-a^۲=۰$ دو ریشه دارد. حدود a را به دست آورید.

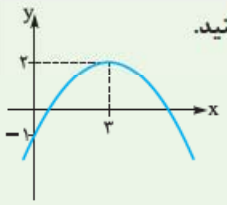
۸۴- معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲-(a+۱)x-b=۰$ به ازای همهٔ مقادیر $a\neq۰$ دو جواب دارد. محدودهٔ b را به دست آورید.

■ معادله‌های زیر را حل کنید.

۸۵- $(x^۲-۱)^۴+(x^۲-۱)^۲-۲=۰$

۸۶- $(\frac{x^۲}{۲}-۲)^۲-۱۱(\frac{x^۲}{۲}-۲)+۱۰=۰$

۸۷- $(۴-x^۲)^۲-۲(۴-x^۲)-۱۵=۰$ (نهایی خرداد ۹۵)

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشتهٔ ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{۳}+۲$ و $\sqrt{۳}-۲$ باشد، به صورت ..... است. ب) اگر $۰<x<۱$ باشد، حاصل $A=\|x\|+\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ برابر ..... است. پ) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ برابر است با (..... و .....) A'. ت) تعداد ریشه های معادلهٔ $\sqrt{۴-۲x}-۳\sqrt{x-۱}+\sqrt{۱-x}-\sqrt{۳-۲x}=۰$، برابر ..... است.				۱
۲	در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جمله‌های اول و پنجم ۱۶ و مجموع جمله‌های سوم و هفتم ۳۶ می‌باشد. مجموع صد جملهٔ ابتدایی این دنباله را بیابید.				۲
۳	اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x+۱=۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل $\frac{۳\alpha^۲-۲۱\alpha}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ را بیابید.				۱/۵
۴	اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-۵x-۳=۰$ باشند، معادلهٔ درجه‌دومی بیابید که جواب‌های آن $\frac{۱}{\alpha-۱}$ و $\frac{۱}{\beta-۱}$ باشد.				۲
۵	شکل مقابل، نمودار تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ می‌باشد. مقدار ضرایب a، b و c، را تعیین کنید. 				۱/۵
۶	معادلهٔ مقابل را حل کنید. $\frac{۱}{x^۲-۲x+۱}+\frac{۲}{x-۱}=۳$				۱/۵
۷	ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد که هر دو ماشین این کار را در ۱۸ ساعت انجام می‌دهند. ماشین A به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می‌دهند؟				۱/۵
۸	معادلات زیر را حل کنید. الف) $(x+\frac{۱}{x})^۲+۲(x+\frac{۱}{x})=۸$ ب) $۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x$				۲
۹	به روش هندسی تعداد جواب‌های معادلهٔ $\|x+۱\|=\|x^۲-۴\|$ را به دست آورید.				۱
۱۰	تابع $f(x)=\|x-۲\|+\|x+۱\|$ را به شکل تابع چندضابطه‌ای بدون نماد قدرمطلق نوشته و آن را رسم کنید. به کمک آن معادلهٔ $\|x-۲\|+\|x+۱\|=۵$ را به روش جبری و هندسی حل کنید.				۲/۵
۱۱	نقاط $A(۰,۳)$ ، $B(۳,-۱)$ و $C(۵,۱)$ سه رأس مثلثی هستند. فاصلهٔ رأس B تا میانهٔ وارد بر ضلع BC چه‌قدر است؟				۲
۱۲	مساحت مربعی که دو ضلع آن روی خط‌های $۲x+y=۲$ و $۴x+۲y=-۶$ قرار دارد را بیابید.				۱/۵
	مجموع نمرات				۲۰

✓ پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱. جمله‌های ردیف زوج به صورت $\ldots, \boxed{11}, 7, \boxed{3}, -1$ هستند؛ پس خودشان یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۸+ خواهند بود. ($\overset{+8}{\curvearrowright}$)

۲. $S_1 = 2 = a_1$ و $S_2 = 6 = a_1 + a_2$ است، پس $a_2 = 4$ خواهد بود.

۳. $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ است پس داریم:

$$1+2+3+\ldots+19 = \frac{19\times 20}{2} = 190$$

۴. نادرست است، چون: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

۵. نادرست است. تعداد جملات برابر ۵۰ و قدرنسبت برابر ۲ است؛ پس داریم:

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2 + 100) = 2550$$

۶. درست است. قدرنسبت برابر ۵ است؛ پس $x = 2$ است. داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(4 + 4(5)) = 60$$

۷. $a_n = 3n - 1 \Rightarrow 2, 5, 8, \ldots$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2(2) + (n-1)(3))$$

$$= \frac{n}{2}(3n+1) \Rightarrow \frac{n}{2}(3n+1) = 610 \Rightarrow n = 20$$

۸. از نقطهٔ اول به هر کدام از ۹ نقطهٔ دیگر، از نقطهٔ دوم به ۸ نقطهٔ باقی‌مانده و ... پس در کل داریم: (در مجموع ۴۵ وتر) $9+8+7+\cdots+1 = \frac{9\times 10}{2} = 45$

۹. کافی است مجموع جمله‌های $4\times 24, \ldots, 4\times 4, 4\times 3$ (که تعداد آن‌ها $24-2=22$ تا است) را به دست آوریم: $S_{22} = \frac{22}{2}(12 + 96) = 1188$

در هر قسمت a_1 و d را به دست آورده و در رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

۱۰. $-5, -3, -1, \ldots \xrightarrow[d=2]{a_1=-5} S_{20} = \frac{20}{2}(2(-5) + 19(2)) = 280$

۱۱. $a_n = 3n - 1 \Rightarrow 2, 5, 8, \ldots$

$$\xrightarrow[d=3]{a_1=2} S_{20} = 10(4 + 19(3)) = 610$$

۱۲. باید ببینیم با جمع‌کردن چند جمله (یعنی n مجهوله) $S_n = 176$ می‌شود.

$$\frac{n}{2}(2 + (n-1)(3)) = 176$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n-1) = 176 \xrightarrow{\times 2} n(3n-1) = 352$$

(طرف اومده معادلهٔ بالا رو حل کنه وقت نهایی تموم شده! دیدم که می‌گم.)

می‌توانیم با روش Δ معادلهٔ درجه‌دوم را حل کنیم اما طولانی خواهد بود. چون n عددی طبیعی است بهتر است با جستجو آن را به دست آوریم:

$$n = 10 \Rightarrow 10\times(29) = 290 \xrightarrow{\text{(کمه)}} n = 11$$

$$\Rightarrow 11(32) = 352 \checkmark \Rightarrow$$ جمع یازده جمله

۱۳. خب جملهٔ اول و آخر دنبالهٔ حسابی (گفته یکنواخت!) را داریم پس بهتر است از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ استفاده کنیم:

$$S_n = 450\text{cm} \Rightarrow \frac{n}{2}(\overbrace{45+30}^{75}) = 450 \Rightarrow n = 12$$

۱۴. باید ببینیم به ازای کدام n، $S_n > 125$ می‌شود. با استفاده از فرمول S_n داریم:

$$\frac{n}{2}(-2 + 3(n-1)) > 125 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n-5) > 125$$

$$\xrightarrow{\times 2} n(3n-5) > 250 \xrightarrow{\text{(با جست‌وجو برای n)}} n = 10$$

$$\Rightarrow 10(25) > 250$$ برقرار نیست $\Rightarrow n \geq 11$

با جمع حداقل یازده جمله، از ۱۲۵ بیشتر می‌شود.

۱۵. شبیه مسئلهٔ قبلی باید $S_n > 400$ باشد:

$$\frac{n}{2}(\overbrace{8+(n-1)(8)}^{8n}) > 400 \Rightarrow 4n^2 > 400$$

$$\Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

توجه دارید چون n عددی طبیعی است؛ پس $n < -10$ دیگر قابل قبول نیست *(و إلا تو حالت کلی از $x^2 > 100$ با رادیکال‌گیری نتیجه می‌گیریم $|x| > 10$. از این هم می‌شه $x > 10$ یا $x < -10$)*.

۱۶. اول جمله‌های فارسی را به زبان ریاضی بنویسیم. بعد هم با فرمول S_n و a_n باز می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 3\times\frac{12}{2}(2a_1 + 11d) \\ \xrightarrow[\text{و ساده‌سازی}]{\div 4} \begin{cases} 8a_1 + 4d = 0 \\ \times(-8)\ \ a_1 + 2d = 6 \end{cases} \\ \qquad\qquad d = 4 \Rightarrow a_1 = -2 \\ a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \end{cases}$$

۱۷. مجموع ۵ جملهٔ اول همان S_5 است، پس $S_5 = 10$. مجموع ۵ جملهٔ بعدی یعنی $a_6 + a_7 + \cdots + a_{10}$. برای این جمع کافی است جمع جمله‌های اول تا دهم را از جمع جمله‌های اول تا پنجم کم کنیم. پس $S_{10} - S_5 = 35$.

$$\begin{cases} S_5 = 10 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 10 \\ S_{10} - 10 = 35 \Rightarrow S_{10} = 45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 10 \xrightarrow{\div 5} a_1 + 2d = 2 \\ 5(2a_1 + 9d) = 45 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 9 \end{cases}$$

$$d = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

پس: $S_{50} = 25(0 + 49(1)) = 1225$

۱۸. S_n همان جمع جمله‌های اول تا n را به ما می‌دهد. پس:

الف) $n = 10 \Rightarrow S_{10} = 10\times 39 = 390$

ب) $a_6 + a_7 + \cdots + a_{15} = S_{15} - S_5 = 15(59) - 5(19) = 790$

پ) طبق توضیحات درس‌نامه داریم:

$$S_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3 \ , \ S_2 = 14 \Rightarrow \overset{+3}{a_1 + a_2} = 14$$

$$\Rightarrow a_2 = 11 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 8$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)(8) = 8n - 5$$

۱۹. جمله‌های ردیف زوج همان $\overset{-4}{a_2}, \overset{2}{a_4}, \ldots, a_{20}$ هستند *(تعدادشون ۱۰تاس)*. این‌ها خود یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶ هستند، پس مجموع آن‌ها می‌شود: $\frac{10}{2}(-8 + 9(6)) = 230$

جمله‌های ردیف فرد هم همان $\overset{-7}{a_1}, \overset{-1}{a_3}, \ldots, a_{19}$ *(تعدادشون بازم ۱۰تاس)* هستند. این‌ها هم دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶+ هستند پس جمع آن‌ها می‌شود: $\frac{10}{2}(-14 + 9(6)) = 200$.

۲۰. دو معادله را به صورت ریاضی می‌نویسیم. می‌توانیم آن‌ها را باز و از حل دستگاه دو معادله دو مجهول، a_1 و d را بیابیم. اما صبر کنید اگر این دو معادله را از هم کم کنیم، به نتیجهٔ خوبی می‌رسیم:

$$-\begin{cases} a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 590 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} = 530 \end{cases}$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_2) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) = 60$$

$$\xrightarrow{\text{(اختلاف هر دو جملهٔ متوالی قدرنسبت می‌شه)}} \underbrace{d + d + \cdots + d}_{10d} = 60 \Rightarrow d = 6$$

جمع ۲۰ جملهٔ اول برابر $۱۱۲۰ = ۵۹۰ + ۵۳۰$ است. با فرمول S_n داریم:

$$S_{۲۰} = ۱۰(۲a_۱ + ۱۹(۶)) = ۱۱۲۰ \Rightarrow a_۱ = -۱$$

۲۱. اولین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶، عدد ۱۰۲ (به ۲ و ۳ می‌خوره) است.

مجموع اعداد $\underbrace{۱۰۲}_{+۶}, \underbrace{۱۰۸}_{+۶}, ۱۱۴, \ldots$ را می‌خواهیم. آخرین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶ نیز عدد ۹۹۶ *(بازم به ۲ و ۳ می‌خوره حالا می امتحان کن!)* است.

حالا ببینیم چندتا عدد داریم:

جملهٔ عمومی با $a_۱ = ۱۰۲$ و $d = ۶$ را نوشته و جملهٔ nام را برابر ۹۹۶ قرار می‌دهیم:

$$۹۹۶ = ۱۰۲ + (n-۱)(۶) \Rightarrow n = ۱۵۰$$

داریم

$$۱۵۰\text{تا عدد} \Rightarrow S_{۱۵۰} = \frac{۱۵۰}{۲}(۲(۱۰۲) + ۱۴۹(۶)) = ۸۲۳۵۰$$

۲۲. این اعداد $۱۲, ۱۷, ۲۲, \ldots$ *(دورقمی‌های به شکل $۵k+۲$)* هستند. آخرین عدد ۹۷ است. شبیه قبلی اول تعداد این اعداد را به دست می‌آوریم:

$$۹۷ = ۱۲ + (n-۱)(۵) \Rightarrow n = ۱۸ \Rightarrow S_{۱۸} = ۹(۲(۱۲) + ۱۷(۵)) = ۹۸۱$$

۲۳. دونده برای انداختن توپ اول $۲ \times ۲ = ۴$ متر، برای توپ دوم $۲(۲ + ۳) = ۱۰$ متر، برای توپ سوم $۲(۲ + ۳ + ۳) = ۱۶$ و ... می‌دود. مقدار طی‌شده برای انداختن توپ nام، یک دنبالهٔ حسابی با $a_۱ = ۴$ و $d = ۶$ می‌شود. حالا:

$$S_n = ۳۷۴ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۸ + (n-۱)(۶)) = \frac{n}{۲}(۶n + ۲)$$

$$= ۳n^۲ + n = ۳۷۴$$

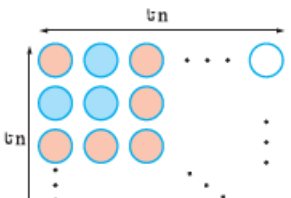
$$\xrightarrow{\text{به‌ازای } n=۱۰ \text{ می‌شه } ۳۱۰ \text{ پس کمه}} n = ۱۱ \Rightarrow ۳(۱۲۱) + ۱۱ = ۳۷۴ \checkmark$$

پس ۱۱ توپ را درون سبد انداخته است.

۲۴. **روش اول:**

$$S_n = \underbrace{۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱)}_{\text{مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با } a_۱=۱ \text{ و } d=۲} = \frac{n}{۲}(۲ + ۲(n-۱)) = n^۲$$

روش دوم: به شکل روبه‌رو توجه کنید. $n \times n = n^۲$ دایره در شکل وجود دارد. حالا دایره‌ها را طور دیگری شمارش می‌کنیم. دایره‌ها را با الگوی مقابل آبی و سیاه می‌کنیم. تعداد آن‌ها می‌شود $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱)$. چون یک تعداد دایره را شمارش کرده‌ایم دو عبارت به دست آمده، برابرند. پس:



$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱) = n^۲$$

رابطه می‌گوید مجموع n عدد فرد متوالی که از یک شروع می‌شود برابر تعداد آن‌ها به توان ۲ است.

۲۵. **رابطهٔ اندیسی در دنبالهٔ حسابی**

رابطهٔ جالبی بین جمله‌های دنبالهٔ حسابی به نام رابطهٔ اندیسی وجود دارد. ببینید:

$$m+n = p+k \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_k \quad (m,n,p,k \text{ اعداد طبیعی})$$

مثلاً $a_۲ + a_۶ = a_۱ + a_۷$ (چون جمع اندیس‌های دو طرف برابر ۸ است)

یا $a_۱ + a_۹ = a_۲ + a_۸ = a_۳ + a_۷ = a_۵ + a_۵$

البته توجه کنید رابطه‌ای به صورت $a_۲ + a_۸ = a_{۱۰}$ درست نیست (دوتا این‌ور و دوتا اون‌ور و اندیس‌ها رو نمی‌شه جمع کرد).

طبق رابطهٔ اندیسی داریم:

$$\overset{۱۰}{a_۶} + \overset{۱۰}{a_۶} = a_۱ + a_{۱۱} = a_۲ + a_{۱۰} = \cdots = a_۷ + a_۵$$

$$\Rightarrow a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ + \overbrace{a_۶ + a_۷ + a_۸ + a_۹ + a_{۱۰} + a_{۱۱}}^{۱۰} = ۱۱۰$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{۲۰}$$

۲۶. طبق نکتهٔ درج واسطهٔ حسابی $d = \frac{۴۷-۳}{۱۰+۱} = ۴$ خواهد بود.

$$۳, \overbrace{\underbrace{\boxed{۷}, \boxed{\quad}, \ldots, \boxed{\quad}}_{\text{۱۰ واسطه}}}^{+۴}, ۴۷$$

پس واسطه‌ها $۷, ۱۱, \ldots$ می‌شود. جمع ۱۰ جملهٔ این دنباله برابر است با: $S_{۱۰} = ۵(۱۴ + ۹(۴)) = ۲۵۰$. توجه دارید که جمع واسطه‌ها را می‌خواهیم پس جملهٔ اول ۷ است نه ۳.

۲۷. **مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب:** **مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب از رابطهٔ $۱۸۰(n-۲)$ به دست می‌آید.**

مجموع زوایای داخلی ۵ ضلعی می‌شود $۱۸۰ \times ۳ = ۵۴۰$. حالا $S_۵ = ۵۴۰$ است. پس:

$$\frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴(۶)) = ۵۴۰ \Rightarrow a_۱ = ۹۶^\circ$$

۲۸. در درس‌نامه گفتیم مجموع n جملهٔ اول از $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$ هم به دست می‌آید، پس $S_{۱۰۰} = ۵۰(a_۱ + a_{۱۰۰})$. از طرفی:

$$(a_۱ + a_{۱۰۰}) + (a_۲ + a_{۹۹}) + (a_۳ + a_{۹۸}) = ۱۵۰$$

اما طبق رابطهٔ اندیسی (پاسخ سؤال ۲۵) $a_۱ + a_{۱۰۰} = a_۲ + a_{۹۹} = a_۳ + a_{۹۸}$. بنابراین $a_۱ + a_{۱۰۰} = ۵۰$ و $S_{۱۰۰} = ۵۰ \times ۵۰ = ۲۵۰۰$ است.

۲۹. به دسته‌بندی زیر دقت کنید:

$$\underbrace{\{۱\}}_{۱}, \underbrace{\{۲,۳\}}_{۲}, \underbrace{\{۴,۵,۶\}}_{۳}, \ldots, \underbrace{\{\text{دستهٔ نوزدهم}\}}_{۱۹}$$

تا انتهای دستهٔ نوزدهم به تعداد $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۹$ یعنی $\frac{۱۹ \times ۲۰}{۲} = ۱۹۰$ جمله جلو آمده‌ایم، پس دستهٔ بیستم با عدد ۱۹۱ شروع شده و ۲۰ جمله دارد؛ پس داریم:

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(۱۹۱) + (۲۰-۱)(۱)) = ۴۰۱۰$$

۳۰. جملات دنباله به صورت $۳n$ هستند. شبیه مسئلهٔ قبل تا انتهای دستهٔ چهاردهم به تعداد $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۴ = \frac{۱۴ \times ۱۵}{۲} = ۱۰۵$ عدد جلو آمده‌ایم؛ یعنی آخرین جملهٔ دستهٔ چهاردهم $۳ \times ۱۰۵ = ۳۱۵$ است. اولین عدد دستهٔ پانزدهم برابر ۳۱۸ بوده و این دسته ۱۵ جمله (با قدرنسبت ۳) دارد؛ پس مجموع جمله‌های دستهٔ پانزدهم برابر است با:

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(۲(۳۱۸) + (۱۵-۱)(۳)) = ۵۰۸۵$$

۳۱. شطرنج ۶۴ خانه دارد؛ پس کافی است مجموع $\underbrace{۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^{۶۳}}_{\text{۶۴ جمله}}$ را به دست آوریم:

$$S_{۶۴} = \frac{a_۱(q^n - ۱)}{q-۱} = \frac{(۱)(۲^{۶۴}-۱)}{۲-۱} = ۲^{۶۴} - ۱$$

۳۲. مجموع ۶ جملهٔ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\sqrt{۲}$ را می‌خواهیم:

$$S_۶ = \underbrace{\sqrt{۲} + \sqrt{۲}^۲ + \cdots + \sqrt{۲}^{۱۱}}_{\text{۶ جمله}} = \frac{(\sqrt{۲})(۲^۶ - ۱)}{۲-۱} = ۶۳\sqrt{۲}$$

۳۳. مجموع ۸ جملهٔ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت -۲ را می‌خواهیم:

$$S_۸ = \frac{a_۱(q^۸ - ۱)}{q-۱} = \frac{(۱)((-۲)^۸ - ۱)}{-۲-۱} = -\frac{۲۵۵}{۳} = -۸۵$$

۳۴. درست است.

$$S_۷ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^۶} = \frac{(۱)(۱ - (\frac{۱}{۲})^۷)}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲(۱ - \frac{۱}{۱۲۸})$$

$$= ۲ \times \frac{۱۲۷}{۱۲۸} = \frac{۱۲۷}{۶۴}$$

۳۵. درست است.

$$S_n = \frac{۱}{۶}(۳^n - ۱)$$

۳۶. نادرست است، چون:

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow S_۱ = \frac{۱}{۶}(۲) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۳} \\ n=۲ \Rightarrow S_۲ = \frac{۱}{۶}(۳^۲ - ۱) = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \overset{\frac{۱}{۳}}{a_۱} + a_۲ = \frac{۴}{۳} \\ \Rightarrow a_۲ = ۱ \end{cases}$$

۳۷. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با $q=-\frac{۱}{۲}$ و $a_۱=۱$ را می‌خواهیم:

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{(۱)(۱-(-\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۲}{۳}(۱-\frac{۱}{۱۰۲۴})$$

$$=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}=\frac{۳۴۱}{۵۱۲}$$

۳۸.
$$(۱+\frac{۱}{۲})+(۳+\frac{۱}{۴})+\cdots=\underbrace{(۱+۳+۵+\cdots)}_{\text{دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲}}+\underbrace{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots)}_{\text{دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت }\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{۱۰}{۲}(۲(۱)+(۱۰-۱)(۲))+\frac{(\frac{۱}{۲})(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$=۱۰۰+۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}=۱۰۰+\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$$

۳۹.
$$\frac{a^۵-۱}{a-۱}=\frac{(a-۱)(a^۴+a^۳+a^۲+a+۱)}{a-۱}=a^۴+a^۳+a^۲+a+۱$$

۴۰.
$$a_n=\frac{۳^{n-۱}}{۳}\Rightarrow \frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳},\cdots$$

$$\xrightarrow[q=۲]{a_۱=\frac{۱}{۳}} S_{۱۰}=\frac{\frac{۱}{۳}(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲}=\frac{۱۰۲۳}{۳}=۳۴۱$$

۴۱.
$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=-۱۲۶\Rightarrow\frac{۶(۱-(-۲)^n)}{۳}=-۱۲۶$$

$$\Rightarrow ۱-(-۲)^n=-۶۳\Rightarrow ۶۴=(-۲)^n\Rightarrow n=۶$$

۴۲.
$$S_n>۵۰۰\Rightarrow\frac{۱-۳^n}{-۲}>۵۰۰\Rightarrow\frac{۳^n-۱}{۲}>۵۰۰$$

$$\Rightarrow ۳^n-۱>۱۰۰۰\Rightarrow ۳^n>۱۰۰۱$$

$$\xrightarrow{\text{با جست‌وجو}} n\geq ۷\ (\text{حداقل ۷ جمله})$$

۴۳.
$$\begin{cases} a_۱+a_۳=۱\xrightarrow{a_n=a_۱q^{n-۱}}a_۱+a_۱q^۲=۱\\ \Rightarrow a_۱(۱+q^۲)=۱\\ S_۴=۳\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^۴)}{۱-q}=۳\\ \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}}\frac{a_۱(۱-q)(۱+q)(۱+q^۲)}{۱-q}=۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه را تقسیم می‌کنیم}}\frac{a_۱(۱+q)(۱+q^۲)}{a_۱(۱+q^۲)}=۳$$

$$\Rightarrow q=۲\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۵}\Rightarrow S_۶=\frac{۶۳}{۵}$$

۴۴. مجموع ۳ جملهٔ اول که همان $S_۳$ است. سه جملهٔ دوم $a_۴, a_۵, a_۶$ است که جمع آن‌ها برابر $S_۶-S_۳$ است.

$$\begin{cases} S_۳=۱۳۶\Rightarrow\frac{(a_۱)(۱-q^۳)}{۱-q}=۱۳۶\\ S_۶-S_۳=۱۷\Rightarrow S_۶=۱۳۶+۱۷=۱۵۳\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=۱۵۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{(با تقسیم دو طرف و ساده‌کردن)}}\frac{۱-q^۶}{۱-q^۳}=\frac{۱۵۳}{۱۳۶}=\frac{۹}{۸}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}}\frac{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}{۱-q^۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow q^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{S_۶}{S_۳}=۹\Rightarrow\frac{\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}}=۹\Rightarrow\frac{۱-q^۶}{۱-q^۳}=۹$$ **۴۵.**

$$\Rightarrow\frac{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}{۱-q^۳}=۹\Rightarrow ۱+q^۳=۹\Rightarrow q=۲$$

حالا داریم:

$$\frac{S_{۱۰}}{S_۵}=\frac{\frac{a_۱(۱-q^{۱۰})}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۵)}{۱-q}}=\frac{۱-q^{۱۰}}{۱-q^۵}=\frac{(۱-q^۵)(۱+q^۵)}{۱-q^۵}$$

$$=۱+q^۵=۱+۳^۵=۳۳$$

۴۶. مساحت مربع برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{۱}{۲}$، در مرحلهٔ دوم $\frac{۱}{۴}$ و ... در مرحلهٔ nام، $(\frac{۱}{۲})^n$ از مساحت مربع رنگ می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+(\frac{۱}{۲})^n\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}(۱-(\frac{۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}}\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۱۰۰}\geq(\frac{۱}{۲})^n\xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شه}]{\text{(هر دو طرف مثبتن با معکوس‌کردن}}۱۰۰\leq ۲^n$$

$$\xrightarrow{\text{جست‌وجو}} ۷\leq n$$

پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود.

۴۷. توجه کنید که سؤال $S_{۲۰}$ را نمی‌خواهد. گفته حاصل‌ضرب جمله‌ها.

حاصل ضرب n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

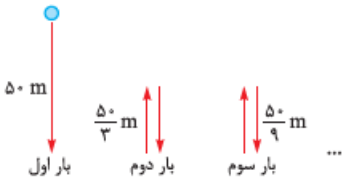
$$(a_۱a_۲\ldots a_n)=(a_۱)(a_۱q)(a_۱q^۲)\ldots(a_۱q^{n-۱})$$

$$=(a_۱)^n q^{۱+۲+\cdots+n-۱}=(a_۱)^n q^{\frac{(n-۱)n}{۲}}$$

در دنبالهٔ هندسی داده‌شده $a_۱=۲$ و $q=\sqrt{۲}$ است. پس:

$$\text{ضرب ۲۰ جملهٔ اول}=۲^{۲۰}\times(\sqrt{۲})^{\frac{۱۹\times۲۰}{۲}}=۲^{۲۰}\times(\sqrt{۲})^{۱۹۰}=۲^{۲۰}\times۲^{۹۵}=۲^{۱۱۵}$$

۴۸.



$$\text{مجموع}=۵۰+۲(\frac{۵۰}{۳})+۲(\frac{۵۰}{۳^۲})+\cdots+۲(\frac{۵۰}{۳^۶})$$ (دقت کردید!)

بار اول فقط از بالا به پایین آمده است (۵۰ m). اگر این جمله را جدا کنیم، ۶ جملهٔ بعدی تشکیل دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱۰۰}{۳}$ و $q=\frac{۱}{۳}$ می‌دهند. پس:

$$\text{مجموع}=۵۰+\frac{\frac{۱۰۰}{۳}(۱-(\frac{۱}{۳})^۶)}{۱-\frac{۱}{۳}}=۵۰+۵۰(۱-\frac{۱}{۷۲۹})$$

$$=۵۰(۲-\frac{۱}{۷۲۹})=۵۰\times\frac{۱۴۵۷}{۷۲۹}\simeq ۱۰۰\ \text{m}$$

۴۹. پرانتز اول جمع ۹ جملهٔ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت x است. دومی هم همین‌طور با قدرنسبت $-x$؛ پس:

$$A=\frac{۱-x^۹}{۱-x}\times\frac{۱-(-x)^۹}{۱+x}=\frac{(۱-x^۹)(۱+x^۹)}{۱-x^۲}=\frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^۲}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{۲}} A=\frac{۱-۲^۹}{۱-۲}=۵۱۱$$

۵۰. جملهٔ سوم، هفتم و نهم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب به صورت a_1+8d, a_1+6d, a_1+2d است. این سه عدد، تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، پس مربع جملهٔ وسط برابر با ضرب دو جملهٔ کناری است.

$$(a_1+2d)(a_1+8d)=(a_1+6d)^2 \Rightarrow a_1^2+10a_1d+16d^2$$
$$=a_1^2+12a_1d+36d^2 \Rightarrow 2a_1d+20d^2=0$$
$$\Rightarrow d(2a_1+20d)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \Rightarrow \text{همهٔ جمله‌ها برابر می‌شوند} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \\ \underbrace{2a_1+20d=0}_{\text{دقت کنید.}} \end{cases}$$
$$\Rightarrow S_{21}=\frac{21}{2}(\overbrace{2a_1+20d}^{\text{صفر}})=0$$

پس مجموع ۲۱ جملهٔ اول برابر صفر است.

۵۱. اگر دنبالهٔ هندسی را t_n و دنبالهٔ حسابی را a_n در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} a_1=t_1 \\ a_4=t_2 \\ a_{16}=t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+3d=a_1q \\ a_1+15d=a_1q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(q-1)=3d \quad (1) \\ a_1(q^2-1)=15d \quad (2) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_1(q-1)(q+1)}{a_1(q-1)}=\frac{15d}{3d}$$
$$\Rightarrow q+1=5 \Rightarrow q=4$$
$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q} \Rightarrow \frac{S_6}{a_1}=\frac{1-4^6}{1-4}=\frac{4095}{3}=1365$$

۵۲. S_1 همان a_1 است؛ پس داریم:

$$n=1 \Rightarrow S_1=4-\frac{(-1)}{2^{-1}}=6 \Rightarrow a_1=6$$
$$n=2 \Rightarrow S_2=4-\frac{(-1)^2}{2^2}=3 \overset{6}{\Rightarrow} a_1+a_2=3 \Rightarrow a_2=-3$$

پس دنبالهٔ هندسی به صورت $-\frac{3}{4}$ ، -3 ، $\frac{3}{2}$ ، 6 است. ($\times(-2)$ ، $\times(-2)$)

جملات ردیف زوج دنباله به صورت $\ldots,-\frac{3}{16},-\frac{3}{4},-3$ هستند، یعنی دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$؛ پس مجموع جملات $a_2,a_4,\ldots,a_{20}$ (یعنی ۱۰ جمله) برابر است با:

$$\frac{(-3)(1-(\frac{1}{4})^{10})}{1-\frac{1}{4}}=-4(1-(\frac{1}{4})^{10})$$

۵۳. جمله‌های دوم، چهارم و دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب به صورت $1+d$، $1+3d$ و $1+11d$ هستند. این ۳ جمله تشکیل دنبالهٔ هندسی نیز می‌دهند؛ پس داریم:

$$(1+d)(1+11d)=(1+3d)^2$$
$$\Rightarrow 1+11d+d+11d^2=1+6d+9d^2$$
$$\Rightarrow 6d=-2d^2 \xrightarrow[d\neq 0]{\div 2d} 3=-d \Rightarrow d=-3$$
$$1+d,1+3d,1+11d \xrightarrow{d=-3} -2 \overset{\times 4}{,} -8 \overset{\times 4}{,} -32$$

پس جملهٔ سوم دنبالهٔ هندسی برابر -2 و جملهٔ پنجم آن برابر -8 است؛ بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر 2 است. حالا $a_2=-\frac{2}{2}=-1$ و $a_1=-\frac{1}{2}$؛ پس داریم:

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{-\frac{1}{2}(1-(2)^{10})}{1-(2)}$$
$$=\frac{1}{2}(1-1024)=-\frac{1023}{2}$$

۵۴.

$$x^2+\frac{x}{2}-3=0 \Rightarrow S=-\frac{b}{a}=-\frac{\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}\ ,\ P=\frac{c}{a}=-3$$

۵۵. اول معادله را مرتب می‌کنیم تا به صورت $-x^2-3x+2=0$ دربیاید.

حالا $S=-\frac{-3}{-1}=-3$ و $P=\frac{2}{-1}=-2$ است.

۵۶. فرض کنیم β ریشهٔ بزرگ‌تر باشد. داریم:

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{1+12}}{|1|}=\sqrt{13}$$

۵۷. درست است.

$$x^2-4x+1=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta=16-4=12>0 \\ S=-\frac{-4}{1}=4>0 \\ P=1>0 \end{cases} \Rightarrow \text{هر دو ریشه مثبت است.}$$

۵۸. نادرست است.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=(-1)^2-2(-1)=3$$

۵۹. درست است. چون علامت a و c متفاوت است حتماً $ac<0$ و $\Delta=b^2-4ac$ مثبت می‌شود.

۶۰. ریشه یا جواب معادله عددی است که در معادله صدق می‌کند، یعنی می‌توانیم آن را به جای x قرار دهیم.

$$x=-1 \Rightarrow 4-a-7=0 \Rightarrow a=-3$$

حالا کافی است معادلهٔ $4x^2-3x-7=0$ را حل کنیم. $a+c=b$ است؛ پس یکی از ریشه‌ها $x=-1$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}=\frac{7}{4}$ می‌باشد.

۶۱.

$$P=\frac{c}{a}=-\frac{8}{4}=-2$$

۶۲.

$$\left.\begin{aligned} S&=3+2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5}=6 \\ P&=(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})=9-20=-11 \end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-6x-11=0$$

در هر قسمت، اول S و P را به دست می‌آوریم بعد با استفاده از اتحاد، تجزیه، مخرج مشترک و ... عبارت‌ها را به S و P ارتباط می‌دهیم:

۶۳.

$$x^2-4x+1=0 \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=1]{S=-\frac{b}{a}=4} \alpha^2+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta}$$
$$=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=S^2-2P+\frac{S}{P}=14+4=18$$

(گفتیم که $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ رو حفظ باشین.)

۶۴.

$$x^2-4x-2=0 \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-2]{S=-\frac{b}{a}=4} \frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}$$
$$=\frac{\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{S^2-2P+S}{P+S+1}=\frac{24}{3}=8$$

۶۵.

$$x^2+2x-5=0 \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-5]{S=-\frac{b}{a}=-2} \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=P(S^2-2P)=(-5)(14)=-70$$

۶۶.

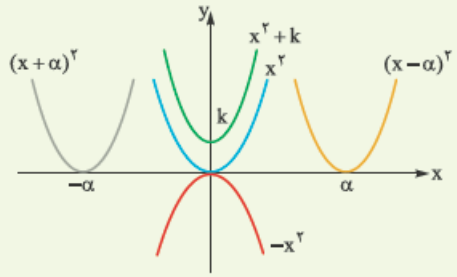
$$x^2-7x+4=0 \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=4]{S=-\frac{b}{a}=7}$$

به طور مستقیم $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ را نمی‌توانیم حساب کنیم

$\Leftarrow$ مربع آن را حساب می‌کنیم و بعد رادیکال می‌گیریم

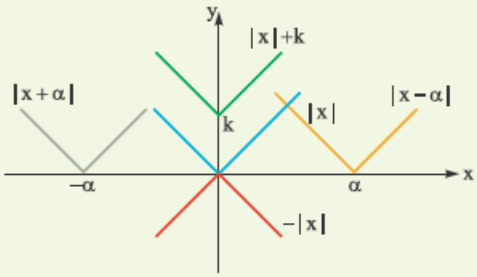
$$(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})^2=\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

نمودارهای مهم



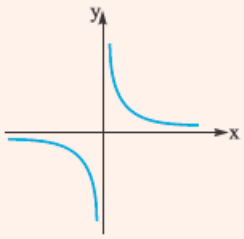
$(\alpha, k>0)$

$f(x)=x^2, -x^2, (x\pm\alpha)^2, x^2\pm k$



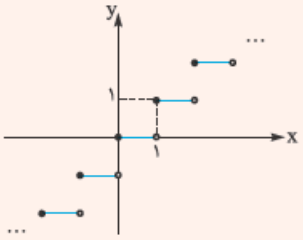
$(\alpha, k>0)$

$f(x)=|x|, -|x|, |x\pm\alpha|, |x|\pm k$

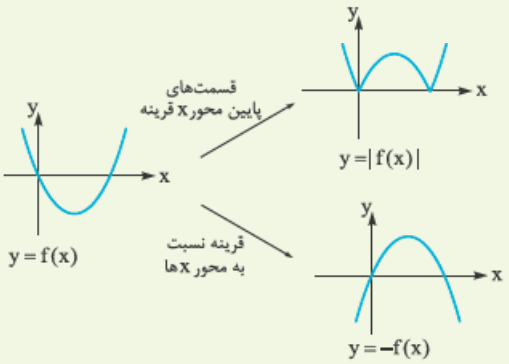


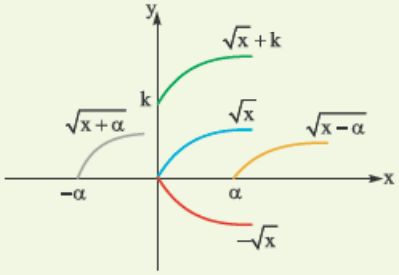
$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$D_f=R_f=\mathbb{R}-\{0\}$$



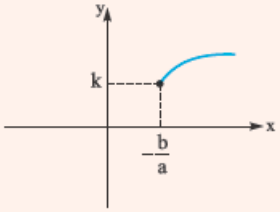
$$f(x)=[x]\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\R_f=\mathbb{Z}\end{cases}$$



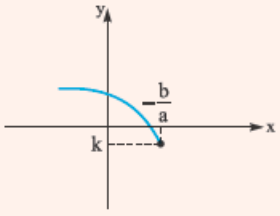


$(\alpha, k>0)$

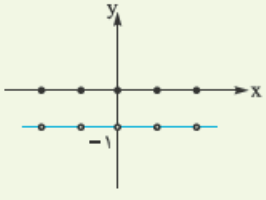
$f(x)=\sqrt{x}, \sqrt{x\pm\alpha}, -\sqrt{x}, \sqrt{x}\pm k$



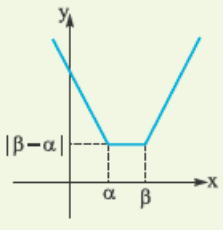
$$f(x)=\sqrt{ax+b}+k \quad (a>0)$$



$$f(x)=\sqrt{ax+b}+k \quad (a<0)$$

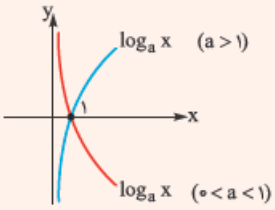


$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



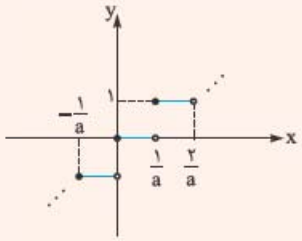
$(\alpha<\beta)$

$$f(x)=|x-\alpha|+|x-\beta|$$

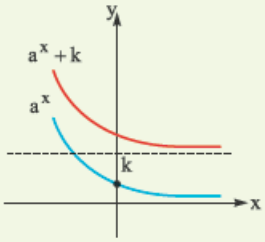


$$f(x)=\log_a x$$

$$\begin{cases} D_f=(0,+\infty) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$$



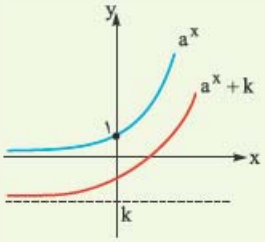
$$f(x)=[ax] \qquad (a>0)$$



$$f(x)=a^x+k \quad (k \text{ تا بالا یا پایین})$$

$$(0<a<1)$$

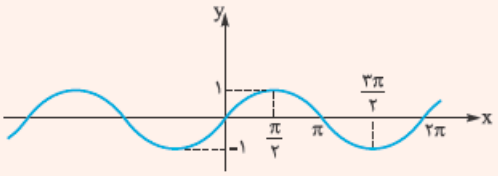
$$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ R_f=(k,+\infty) \end{cases}$$



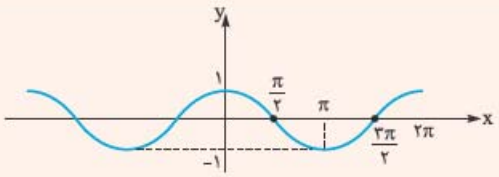
$$f(x)=a^x+k \quad (k \text{ تا بالا یا پایین})$$

$$(a>1)$$

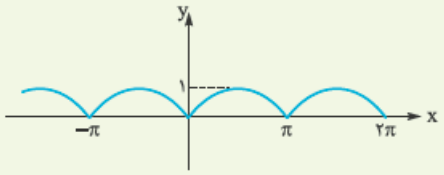
$$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ R_f=(k,+\infty) \end{cases}$$



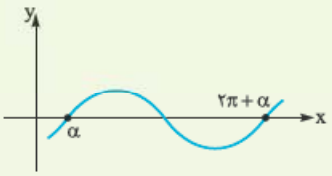
$$f(x)=\sin x, D_f=\mathbb{R}, R_f=[-1,1]$$



$$f(x)=\cos x, D_f=\mathbb{R}, R_f=[-1,1]$$

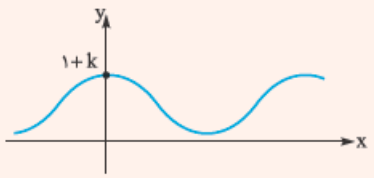


$$f(x)=|\sin x|$$

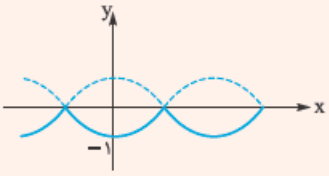


(α واحد به راست یا چپ)

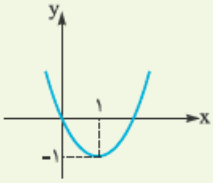
$$f(x)=\sin(x-\alpha)$$



$$f(x)=k+\cos x \quad (k \text{ واحد بالا یا پایین})$$



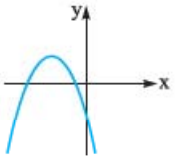
$$f(x)=-|\cos x|$$



$$=(x-1)^2-1$$

$$f(x)=x^2-2x=x^2-2x+1-1$$

آزمون‌های نیم‌سال اوّل و دوم

ردیف	نمونهٔ امتحان نیم‌سال اول	رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک	حسابان ۱	نمره
	امتحان شمارهٔ ۱	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	
۱	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) $x=1$ صفر تابع $f(x)=x^3+x^2+x-3$ است، در این صورت $f(x)$ بر ..... بخش‌پذیر است. ب) بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^2+2x-5$ برابر ..... است. پ) مجموعه جواب نامعادلهٔ $\lvert x+1\rvert<2$ به صورت بازهٔ ..... است. ت) اگر $f(x)=[x-1]$ باشد، آن‌گاه ..... $=f(2-\sqrt{2})$.			۱
۲	مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ مقابل برابر ۸۷ می‌شود؟	$2,7,12,\ldots$		۱
۳	برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی وجود دارد که شدت تابش پس از عبور از هر یک از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک حداقل تا ۹۹٪ کاهش یابد؟			۱
۴	در معادلهٔ درجه‌دوم $2x^2-8x+m=0$ یکی از جواب‌ها دو واحد از دیگری کم‌تر است. m و هر دو ریشه را بیابید.			۱
۵	شکل مقابل، نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ است. علامت ضرایب a,b,c و تعداد صفرهای تابع را مشخص کنید. 			۱
۶	معادله‌های زیر را حل کنید. الف) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$ ب) $2+\sqrt{1+x}=x-3$ پ) صفرهای تابع $f(x)=x^4+6x^2-7$ را بیابید.			۲
۷	تابع مقابل را بدون قدرمطلق نوشته و آن را رسم کنید.	$f(x)=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$		۱/۵
۸	معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید.	$\frac{x-2}{\lvert 3-x\rvert}=4$		۱
۹	نقاط $A(-3,-4)$ و $B(1,2)$ دو سر قطرهای دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را پیدا کنید.			۱
۱۰	معادلهٔ دو ضلع مستطیلی به‌صورت $x+y=3$ و $x-y=1$ و نقطهٔ $A(-1,-1)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چه‌قدر است؟			۱
۱۱	دو تابع $f(x)=x+3$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ k & x=3\end{cases}$ مساوی‌اند. k را به دست آورید.			۱
۱۲	دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید. الف) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+x-6}$ ب) $g(x)=\frac{3x+5}{\sqrt{2\lvert x\rvert-1}}$			۱
۱۳	نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید. الف) $\begin{cases}f:D_f\to\mathbb{R}\\ f(x)=\sqrt{2x+6}-1\end{cases}$ (در دامنهٔ تعریف) ب) $\begin{cases}f:[-1,1)\to\mathbb{R}\\ f(x)=[2x]\end{cases}$			۲
۱۴	دامنهٔ تابع $f(x)=-\lvert x+1\rvert-2$ را به گونه‌ای محدود کنید تا یک‌به‌یک گردد.			۰/۵
۱۵	ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$ را به دست آورید.			۱
۱۶	اگر $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ باشد: الف) دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید. ب) حاصل $(2f-3g)(2)$ را بیابید.			۱
۱۷	اگر $(fog)(x)=3x-1$ و $f(x)=\frac{x}{x+1}$ باشد، ضابطه‌ای برای تابع $g(x)$ را به دست آورید.			۱
۱۸	اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,-1),(-1,4)\}$ و $g=\{(1,4),(2,3),(5,-1)\}$، تابع $f^{-1}og^{-1}$ را به دست آورید.			۱
	جمع نمرات			۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. **الف** $x-1$

ب طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}=1$ است، پس عرض رأس سهمی یا بیشترین مقدار می‌شود: $f(1)=-4$

پ $|x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2$

$\xrightarrow{-1} -3<x<1 \Rightarrow$ جواب $=(-3,1)$

ت $f(2-\sqrt{2})=[2-\sqrt{2}-1]=[\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{بین } 0 \text{ و } -1}]=-1$

۲. دنبالهٔ داده‌شدهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت $d=5$ است، پس:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow 87=\frac{n}{2}(\underbrace{4+(n-1)(5)}_{5n-1})$$

$$\Rightarrow 174=n(5n-1) \Rightarrow n=6$$

پس مجموع شش جملهٔ اول دنباله برابر ۸۷ می‌شود.

۳. حداقل ۷ لایه

$$(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{(\frac{1}{2})(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} \geq (\frac{1}{2})^n \Rightarrow 100 \leq 2^n \Rightarrow 7 \leq n$$

۴.

$$\begin{cases} \alpha=\beta-2 \\ \alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4 \Rightarrow \beta-2+\beta=4 \Rightarrow \beta=3 \Rightarrow \alpha=1 \\ \alpha\beta=\frac{m}{2} \Rightarrow 3=\frac{m}{2} \Rightarrow m=6 \end{cases}$$

۵. عرض از مبدأ (محل برخورد تابع با محور yها) منفی است، پس $c<0$. سهمی Max دارد پس $a<0$ است. معادله دو ریشهٔ منفی دارد پس $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}<0$، چون $a<0$ پس $b<0$ است. تابع در دو نقطه محور xها را قطع کرده پس دوتا صفر دارد.

۶. **الف** $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$

$\xrightarrow{\times(x^2-1)} x(x+1)+3=(x-2)(x-1)$

$\Rightarrow x^2+x+3=x^2-3x+2 \Rightarrow 4x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$

ریشه هیچ‌کدام از مخرج‌ها نیست پس قابل قبول است.

ب $2+\sqrt{1+x}=x-3 \Rightarrow \sqrt{1+x}=x-5$

$\xrightarrow{\text{به توان دو}} 1+x=x^2-10x+25$

$\Rightarrow x^2-11x+24=0 \Rightarrow (x-3)(x-8)=0$

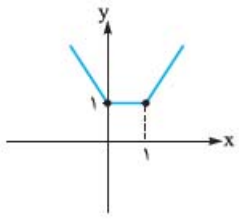
$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \xrightarrow{\text{صدق نمی‌کند}} \text{غیرقابل قبول} \\ x=8 \xrightarrow{\text{صدق می‌کند}} \text{قابل قبول} \end{cases}$$

پ $x^2=t \Rightarrow t^2+6t-7=0 \Rightarrow (t-1)(t+7)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ t=-7 \Rightarrow x^2=-7 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

۷.

$$f(x)=|x|+|x-1|=\begin{cases} -2x+1 & x \leq 0 \\ 1 & 0<x \leq 1 \\ 2x-1 & 1<x \end{cases}$$



۸.

$$\frac{x-2}{|3-x|}=4 \Rightarrow 4|3-x|=x-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<3 \Rightarrow 4(3-x)=x-2 \\ \Rightarrow 12-4x=x-2 \Rightarrow x=\frac{14}{5} \text{ قابل قبول} \\ x>3 \Rightarrow 4(x-3)=x-2 \\ \Rightarrow 3x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{3} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

۹. مرکز دایره، وسط دو سر قطر دایره است؛ پس:

$$M(\frac{1+(-3)}{2},\frac{2+(-4)}{2})=M(-1,-1)$$

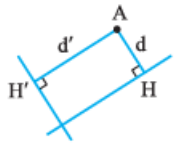
طول پاره‌خط AB (قطر) دو برابر شعاع دایره است؛ پس:

$$2R=\sqrt{(1+3)^2+(2+4)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

پس $R=\sqrt{13}$.

۱۰. دو ضلع داده‌شده عمود بر هم هستند (شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است) و نقطهٔ داده‌شده روی هیچ‌کدام از دو خط نیست، پس فاصلهٔ نقطهٔ A از دو خط، همان طول و عرض مستطیل است.

$$x+y-3=0 \Rightarrow d=\frac{|-1-1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=5\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{مساحت مستطیل}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}$$

$$x-y-1=0 \Rightarrow d'=\frac{|-1+1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱. دامنهٔ هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

اگر $x \neq 3$ باشد $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=f(x)$، پس دو تابع به ازای $x \neq 3$ مساوی‌اند، پس کافی است به ازای $x=3$ هم مساوی باشند:

$$f(3)=g(3) \Rightarrow 6=k$$

۱۲.

الف

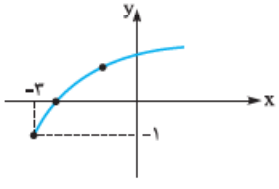
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2,-3 \text{ باید حذف شود} \\ \Rightarrow D=[0,+\infty)-\{2,-3\}=[0,2)\cup(2,+\infty) \end{cases}$$

ب $2|x|-1>0 \Rightarrow |x|>\frac{1}{2} \Rightarrow x>\frac{1}{2}$ یا $x<-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow D=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$$

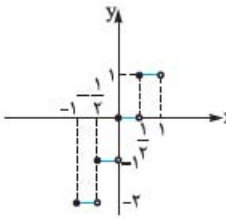
۱۳. **الف**

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1
y	-1	0	1



$D_f: 2x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

ب $-۱\le x<۱ \Rightarrow -۲\le ۲x<۲$



$-۱\le x<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲\le ۲x<-۱ \Rightarrow y=-۲$

$-\frac{۱}{۲}\le x<۰ \Rightarrow -۱\le ۲x<۰ \Rightarrow y=-۱$

$۰\le x<\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰\le ۲x<۱ \Rightarrow y=۰$

$\frac{۱}{۲}\le x<۱ \Rightarrow ۱\le ۲x<۲ \Rightarrow y=۱$

۱۴. می‌توانیم دامنهٔ تابع را به صورت $(-۱,+\infty]$ یا $[-۱,-\infty)$ محدود کنیم تا تابع یک‌به‌یک گردد.

۱۵.
$$y=\frac{x+۱}{۲x-۱} \Rightarrow ۲xy-y=x+۱$$
$$\Rightarrow ۲xy-x=y+۱ \Rightarrow x(۲y-۱)=y+۱$$
$$\Rightarrow x=\frac{y+۱}{۲y-۱} \Rightarrow f^{-۱}(y)=\frac{y+۱}{۲y-۱} \quad \text{یا} \quad f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲x-۱}$$

۱۶.

الف $D_f: ۴x-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x(۴-x)\ge ۰ \Rightarrow ۰\le x\le ۴$

$D_g=\mathbb{R}-\{۱\}, g(x)=۰ \Rightarrow x=-۱$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

$=[۰,۴]-\{۱,-۱\}=[۰,۱)\cup(۱,۴]$

ب $(۲f-۳g)(۲)=۲f(۲)-۳g(۲)=۲\times ۲-۳\times ۳=-۵$

۱۷.
$$f(g(x))=۳x-۱ \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+۱}=۳x-۱$$
$$\Rightarrow g(x)=۳x\,g(x)-g(x)+۳x-۱$$
$$\Rightarrow ۲g(x)-۳x\,g(x)=۳x-۱$$
$$\Rightarrow g(x)(۲-۳x)=۳x-۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۳x-۱}{۲-۳x}$$

۱۸.
$$\left.\begin{array}{l} f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(-۱,۳),(۴,-۱)\} \\ g^{-۱}=\{(۴,۱),(۳,۲),(-۱,۵)\} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}og^{-۱}=\{(۳,۱),(-۱,۲)\}$$